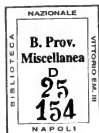


TRUDI

UNA SINGOLARE ELIMINAZIONE



BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armando



Palchetto

Palchetto

Num° d'ordine 51

330/9

mi). 9. 25. 151



STUDII

INTORNO

AD UNA SINGOLARE ELIMINAZIONE

STUDII

INTORNO

AD UNA SINGOLARE ELIMINAZIONE

con applicazione alla ricerca della relazione

TRA GLI ELEMENTI DI DUE CONICHE,
L'UNA ISCRITTA, L'ALTRA CIRCOSCRITTA AD UN POLIGONO;
ED AI CORRISPONDENTI TEOREMI DEL PONCELET.

MEMORIA

PER

NICOLA TRUDI



NAPOLI

STAMPERIA DEL FIBRENO

Strada Trinità Maggiore n.° 26

1863

*Memoria estratta dal Vol. I^o degli Atti della R. Accademia
delle Scienze Fisiche e Matematiche.*



STUDI INTORNO AD UNA SINGOLARE ELIMINAZIONE,
CON APPLICAZIONE ALLA RICERCA DELLA RELAZIONE TRA GLI ELE-
MENTI DI DUE CONICHE, L'UNA ISCRITTA, L'ALTRA CIRCOSCRITTA
AD UN POLIGONO; ED AI CORRISPONDENTI TEOREMI DEL PONCELET.

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO N. TRUDI.

Letta nell'adunanza del dì 21 ottobre.

NOTIZIE STORICHE

La comparsa nel mondo scientifico di un'opera recente (*) da parte del fondatore della geometria intuitiva, dopo un silenzio malaugurato di oltre a trent'anni in questa scienza per lui condotta a tanta altezza, è stata, com'esser dovea, un vero avvenimento per coloro cui divenno familiare il libro immortale del *Trattato delle proprietà proiettive delle figure*. Nell'opera novella l'illustre autore si è proposto di esporre gli studii analitici che lo guidarono alle antiche scoperte; ed a parte la dottrina e le interessanti vedute scientifiche, che vi tralucono ad ogni passo, ogni spirito imparziale approverà e sottoscriverà di buon grado ai motivi che ne hanno determinata la pubblicazione. Ed è strano in vero di vedere, e spesso in opere accreditate, attribuirsi ad altri geometri le proposizioni fondamentali nel metodo delle proiezioni, come se non esistesse il nome del Poncelet; e sovente ancora riprodotti come nuovi, o contorti con nuovi nomi i più belli teoremi di questo geometra. In quanto

(*) *Applications d'analyse et de géométrie, qui ont servi, en 1822, de principal fondement au Traité des propriétés projectives des figures, par L. V. Poncelet. Paris, 1862.*

a noi aggiungiamo che nella maggior parte delle riflessioni critiche, le quali formano il soggetto di note dottissime all'opera, di cui parliamo, e specialmente in fatto di metodi, noi ritroviamo le nostre proprie convinzioni.

Tra queste note intanto ha per noi un particolare interesse quella sotto il n° III, che ha per titolo « Nota istorica critica e filosofica a proposito de' teoremi sulla iscrizione o circoscrizione simultanea de' poligoni » alle coniche ecc: » ed il nostro interesse muove da chè si tratta di quistioni che già da gran tempo formarono un soggetto prediletto di nostri studii. In detta nota l'autore traccia la storia di queste quistioni e ricorda i primi passi di Fuss e di Steiner; indi il memorabile lavoro di Jacobi pel sistema di due cerchi, pubblicato fin dal 1828 nel 3° volume del giornale di Matematiche di Crelle; accenna all'estensione de' teoremi a due piccoli cerchi della sfera, fatta poco appresso da Richelot, discepolo illustre di Jacobi; e discorre in fine de' lavori recentissimi di Cayley, di Mention, e di Brioschi; di modo che secondo questi ragguagli, le quistioni di cui si tratta sarebbero quasi rimaste obbliate dal 1828 al 1856.

Noi non possiamo esser dolenti che il geometra Francesco ignorasse la piccola parte da noi presa in tali ricerche, ed i nostri modesti risultamenti. L'isolamento al quale ci condannavano le nostre politiche condizioni renderebbero già ragione di questo fatto; ma v'ha di più, chè noi stessi, poco fidenti nelle nostre forze, provammo sempre ritegno ad inviare i nostri umili lavori ad uomini illustri. Egli è vero che una nostra memoria approvata per gli Atti dell'Accademia nel 1853, ma pubblicata per le stampe molto più tardi, contiene per incidente la maggior parte de' risultamenti ai quali eravamo pervenuti in riguardo alle quistioni di cui si tratta, e questa memoria avrebbe potuto essere a cognizione del Poncelet; ma come la sua intitolazione non accennava alle dette quistioni, ed invece alla *Rappresentazione geometrica immediata dell'equazione fondamentale nella teoria delle funzioni ellittiche*, è da ritenere che per questa ragione sia sfuggita all'illustre Poncelet nel raccogliere gli elementi storici da lui pubblicati; come per la ragione medesima ha dovuto sfuggire all'illustre geometra Russo Mention, il quale nel 1859 dà come nuove pel caso di due cerchi le equazioni assai più generali da noi dato per due coniche molto tempo innanzi, e poi riprodotte nella citata memoria del 1853; ma a questo proposito avviene la curiosa circostanza

za che nel numero istesso del *Bullettino dell'Accademia di Pietroburgo*, nel quale trovansi inserito il lavoro del *Mention*, si trova pure accennato tra i libri pervenuti in dono a quell'Accademia il volume de' nostri *Atti*, in cui la suddetta memoria è pubblicata.

Completando adunque le notizie date dal *Poncelet*, noi rammenteremo che i primi nostri lavori intorno ai suoi famosi teoremi rimontano al 1841. In una memoria pubblicata a quell'epoca per le stampe si trovano queste quistioni ridotte alle equazioni più generali di quelle incontrate assai più tardi dal *Mention*, e da quel punto era in gran parte minorata la difficoltà che le circonda. Ivi sono date per la prima volta dimostrazioni analitiche compiute pe' teoremi riguardanti i poligoni variabili iscritti nelle coniche con lati passanti per punti dati; ed in quanto ai poligoni iscritti in una conica con lati tangenti ad un'altra conica vi sono considerati i teoremi pel triangolo e pel quadrilatero; mentre la difficoltà di una eliminazione ci fu allora di ostacolo a poterli concludere in generale. Ma in quella memoria fu pure da noi dato, per la prima volta, un metodo generale per trovare le relazioni che debbono sussistere tra gli elementi di due sezioni coniche l'una iscritta e l'altra circoscritta ad un poligono, ed applicato specialmente al triangolo ed al quadrilatero. Eppure ecco come scrive il chiarissimo *Salmon* nel 1858. « Per far vedere l'uso che può farsi di questo principio, noi cercheremo la condizione » (dovuta a *Cayley*, e d'altronde assai difficile a trovarsi) affinché un « triangolo sia iscritto in una conica e circoscritto ad un'altra ». E questa relazione è precisamente quella da noi data nel 1841.

Ma più tardi nel 1843, dopo aver sormontati gli ostacoli della eliminazione, che avevano limitati i nostri primi lavori, ci fu permesso di dimostrare i teoremi del *Poncelet* nella maniera più generale e diretta, senza ricorrere ad alcuna trasformazione di figura, e quindi di dare un metodo generale assai più esplicito, per trovare la relazione corrispondente ad un poligono di qualsivoglia numero di lati, iscritto in una conica e circoscritto ad un'altra; e tutto ciò risulta da un articolo inserito nel *Rendiconto dell'Accademia* pel 1843.

Ricorderemo ancora che negli *Atti del Congresso degli Scienziati*, tenuto in Napoli poco dopo di quell'epoca, fu da noi letto un articolo intorno a quella singolare eliminazione, essendo il primo ed il solo esempio che per noi si fosse conosciuto di una difficilissima eliminazione compiuta col soccorso della differenziazione, e della integrazione.

*

Non possiamo tacere d'altra parte che essendosi nel 1845 recato in Napoli l'illustre Jacobi, non solo non isdegnò di mostrarci il suo compiacimento pei detti lavori, ma aggiunse alle nostre formole alcuni sviluppi di suo proprio carattere, che noi conserviamo come preziose ricordanze. E furono ancora i suoi incoraggiamenti quelli che ci spinsero più tardi ad applicare i nostri risultamenti all'addizione e moltiplicazione delle funzioni ellittiche di 1^a specie, ch'è il soggetto della nostra memoria del 1853.

Risulta da questi fatti che noi possiamo pretendere alla piccola gloria di aver dato i primi una dimostrazione analitica compiuta e diretta dei teoremi del Poncelet, e di aver dato anche i primi un metodo per la ricerca della relazione, affinchè un poligono di qualsivoglia numero di lati possa essere iscritto e circoscritto a due coniche. Lungi da noi il pensiero di scendero al paragone de' nostri risultamenti con quelli recentemente ottenuti da' grandi geometri testè ricordati e verso de' quali noi professiamo la più sincera venerazione; però sembra che questi risultamenti non abbiano soddisfatto il geometra Francese, il quale inclina quasi a giudicare insufficienti le dimostrazioni analitiche dei teoremi, e sembra ancora di ritenere che la quistione delle relazioni pei poligoni iscritti e circoscritti, anche limitata al caso di due cerchi, non abbia ancora una soluzione pratica e generale. In fatti, se n è il numero dei lati del poligono, le solo formole di Jacobi darebbero le relazioni espresso in funzione di n , dei raggi, e della distanza de' centri de' due cerchi; mentre gli altri metodi obbligano a creare questa relazione pei singoli valori di n . Ma siccome le formole di Jacobi fanno dipendere queste relazioni da funzioni ellittiche, si può dire che la quistione è virtualmente, ma non praticamente risolta; e sotto questo aspetto a noi sembra che il geometra Francese abbia perfettamente ragione. Intanto noi avevamo già veduto che le nostre formole potevano benissimo condurci a risolvere la quistione sotto questo aspetto; ed i risultamenti da noi ottenuti formano il soggetto della presente memoria, nella quale abbiamo dovuto riprodurre con più sviluppo le ricerche intorno alla singolare eliminazione di cui si è discorso, poichè da essa dipendono immediatamente ed i teoremi del Poncelet, e le relazioni più volte mentovate. E forse non saranno lette senza interesse alcune osservazioni intorno all'integrale della famosa equazione che conduce alle funzioni ellittiche. Tuttavolta è giusto di osservare che quasi tutte le proprietà notabilissime delle equazioni, alle

quali noi riduciamo le attuali quistioni, e che poi danno origine a proprietà importanti delle funzioni ellittiche, potrebbero inversamente dedursi da' teoremi geometrici del Poncelet; e certo si vedrà con piacere che questi teoremi possono anche immediatamente condurre alla integrazione di quella equazione differenziale ricordata poc'anzi, o che fu il soggetto di profondo ricerche per parte di Eulero e di Lagrange.

Ci sia lecito in fine di aggiungero che noi non troviamo fondate le obiezioni del Poncelet intorno alla dimostrazione del principale de' suoi teoremi data dal Briosehi (*); il quale *affatto non assume ma dimostra* che l'involuppo del lato libero di un poligono iscritto in una conica coi rimanenti lati tangenti di un'altra, sia una sezione conica passante per quattro punti (reali o immaginari) comuni alle due prime. Ma di questo argomento intendiamo di occupareci espressamente in altra occasione, e mostreremo che il metodo dell'illustre geometra Italiano è forse il meglio adatto ad esprimere le relazioni, di cui si è discorso, in funzione degli elementi dello due coniche o del numero de' lati del poligono.

ARTICOLO I.

Ricerche intorno ad una singolare eliminazione.

1. Nello ricerche, di cui siamo per occuparci, adottiamo il simbolo $\downarrow (v, v')$ per indicar la funzione

$$av''v' + 2b(v + v')v, v + c(v'' + v')' + 2dv, v + 2e(v + v') + f,$$

dove v, v' dinotano variabili, ed a, b, c, d, e, f sono costanti qualunque. Osserviamo che, se pongasi

$$c + d = d',$$

la funzione prenda la forma

$$av''v' + 2b(v + v')v, v + c(v'' + v')' + 2d'v, v + 2e(v + v') + f;$$

ma nel simbolo $\downarrow (v, v')$ può ritenersi indifferentemente sia l'una, sia l'altra forma.

(*) Vedi gli Annali di matematiche del Tortolini, vol. VIII, e del Terquem, vol. XVI

Supponendo una serie di $n+1$ variabili $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$, ed il sistema di n equazioni

$$\downarrow(v_0, v_1)=0, \downarrow(v_1, v_2)=0, \dots, \downarrow(v_{n-1}, v_n)=0,$$

è evidente che si possono eliminare le $n-1$ variabili intermedie $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$, ed aversi una equazione nelle variabili estreme v_0 e v_n ; ma la natura dell'equazione finale è dichiarata nel seguente teorema:

Eliminandosi le variabili intermedie dal dato sistema di equazioni, la relazione tra le variabili estreme v_0 e v_n è un'equazione della stessa forma di ciascuna delle equazioni proposte.

Dimostr. Considerando in generale l'equazione

$$\downarrow(v_i, v_{i+1})=0,$$

cominceremo per trasformarla in due modi, ordinandola una volta rispetto a v_{i+1} , ed una volta rispetto a v_i , ed ogni volta aggiugnendo e togliendo il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine. Così messo per brevità

$$(1) \quad \begin{cases} A=cf-e^2, & C=af-d^2, & E=bd-ac, \\ B=ds-bf, & D=be-cd, & F=ac-b^2, \end{cases}$$

ed inoltre

$$V_i=A-2Bv_i+(C+2D)v_i^2-2Ev_i^3+Fv_i^4,$$

$$V_{i+1}=A-2Bv_{i+1}+(C+2D)v_{i+1}^2-2Ev_{i+1}^3+Fv_{i+1}^4,$$

le due trasformate saranno

$$[(av_i^2+2bv_i+c)v_i+bv_i^3+d^2v_i+e]^2+V_i=0,$$

$$[(av_{i+1}^2+2bv_{i+1}+c)v_{i+1}+bv_{i+1}^3+d^2v_{i+1}+e]^2+V_{i+1}=0.$$

Ma le radici de' due quadrati equivalgono alle metà delle derivate parziali della funzione $\downarrow(v_i, v_{i+1})$ prese rispetto a v_i ed a v_{i+1} ; adunque differenziando l'equazione $\downarrow(v_i, v_{i+1})=0$, verrà

$$\frac{\partial v_i^2}{V_i} = \frac{\partial v_{i+1}^2}{V_{i+1}}.$$

Applicando ora siffatta trasformazione a ciascuna delle date equazioni si ha successivamente

$$\frac{\partial v_0^*}{\partial v_0} = \frac{\partial v_1^*}{\partial v_1} = \frac{\partial v_2^*}{\partial v_2} = \dots = \frac{\partial v_n^*}{\partial v_n} ;$$

quindi tra le variabili estreme si ha l'equazione differenziale

$$\frac{\partial v_0}{\sqrt{A-2Bv_0+(C+2D)v_0^2-2Ev_0^3+Fv_0^4}} = + \frac{\partial v_n}{\sqrt{A-2Bv_n+(C+2D)v_n^2-2Ev_n^3+Fv_n^4}},$$

ed il suo integrale sarà l'eliminata che cerchiamo. Ora ciò basta per concludere il nostro teorema, perchè si sa che la primitiva è appunto un'equazione della forma

$$(2) \quad a'v_0^2v_n^2 + 2b'(v_0 + v_n)v_0v_n + c'(v_0 + v_n)^2 + 2d'v_0v_n + 2e'(v_0 + v_n) + f = 0 ;$$

dove i coefficienti a' , b' , etc: sono cognite funzioni delle quantità A , B , etc: e di una costante che introduce la integrazione.

2. Ma dispensandoci dal ricordare le formole di Eulero (*) pel calcolo de' detti coefficienti, dobbiamo invece qui darne una diretta ed assai più semplice deduzione. A tal' effetto applicheremo all'equazione (2) la stessa trasformazione operata a riguardo dell'equazione $\downarrow(v, v_n) = 0$; di modo che ponendo

$$\begin{aligned} A' &= c'f - d'^2, & C' &= a'f - d'^2, & E' &= b'd' - a'e', \\ B' &= d'e' - b'f, & D' &= b'd' - c'd', & F' &= a'e' - b'^2, \end{aligned}$$

otterremo analogamente l'equazione differenziale

$$\frac{\partial v_0}{\sqrt{A'-2B'v_0+(C'+2D')v_0^2-2E'v_0^3+F'v_0^4}} = + \frac{\partial v_n}{\sqrt{A'-2B'v_n+(C'+2D')v_n^2-2E'v_n^3+F'v_n^4}},$$

ma come le due equazioni differenziali non possono essere diverse, i po-

(*) Institutiones calculi integralis, vol. I, cap. VI, ed il suppl. vol. III.

linomii sotto il radicale saranno identificabili; e quindi per determinare le sei incognite a', b', c', d', e', f' avremo cinque equazioni

$$\begin{aligned} a'f' - e'e' &= A & , & & d'e' - b'f' &= B & , \\ a'f' - d'd' + 2(b'e' - c'e') &= C + 2D & , \\ b'd' - a'e' &= E & , & & a'e' - b'b' &= F & . \end{aligned}$$

Così una delle incognite resterà indeterminata, e terrà luogo della costante voluta dalla integrazione; ma ponendo $b'e' - d'e' = D + \mu$, potremo invece considerare le sei equazioni

$$(3) \quad \begin{cases} a'f' - e'e' = A & , & a'f' - d'd' = C - 2\mu & , & b'd' - a'e' = E & , \\ d'e' - b'f' = B & , & b'e' - c'e' = D + \mu & , & a'e' - b'b' = F & , \end{cases}$$

e dedurre i valori delle sei incognite in funzione di A, B , etc: e di μ , che sarà la costante della integrazione. Ora si può raggiungere questo scopo di una maniera molto semplice adoperando i determinanti (*). In fatti segue dalle precedenti relazioni che de' due determinanti simmetrici

$$P = \begin{vmatrix} A & B & D + \mu \\ B & C - 2\mu & E \\ D + \mu & E & F \end{vmatrix} , \quad Q = \begin{vmatrix} a' & b' & d' \\ b' & c' & e' \\ d' & e' & f' \end{vmatrix}$$

il primo è reciproco del secondo, e sarà quindi $P = Q^*$. Inoltre supposto che il reciproco del determinante P sia

$$\begin{vmatrix} A_n & B_n & D_n \\ B_n & C_n & E_n \\ D_n & E_n & F_n \end{vmatrix} ,$$

(*) Malgrado il rispetto e la venerazione che professiamo verso dell'illustre Ponceli, non sapremmo accettare le sue idee a riguardo de' determinanti (Opera citata, nota III). Noi potremmo qui recare esempi di questioni difficili risolte unicamente per l'aiuto delle proprietà di queste funzioni; ma per non allontanarci dal nostro soggetto ci basterà di far notare che, nelle poche occasioni in cui nel corso di questa memoria siamo indotti a giovarci de' determinanti, ci sarebbe stato certamente possibile di evitarli; ma a patto di infastidire e stancare la pazienza del lettore con formule lussuariamente complesse, e con calcoli scoraggianti, com'è ben facile di sperimentare tentando di ritrovare le nostre conclusioni con mezzi diversi.

in conseguenza di proprietà conosciute de' determinanti reciprochi sarà

$$(4) \quad \begin{cases} A_n = F(C - 2\mu) - E^2, & D_n = BE - (C - 2\mu)(D + \mu), \\ B_n = E(D + \mu) - BF, & E_n = B(D + \mu) - AE, \\ C_n = AF - (D + \mu)^2, & F_n = A(C - 2\mu) - B^2, \end{cases}$$

e quindi si avranno le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} Qa' &= A_n, & Qc' &= C_n, & Qe' &= E_n, \\ Qb' &= B_n, & Qd' &= D_n, & Qf' &= F_n. \end{aligned}$$

le quali, essendo $Q = P^2$, si mutano in

$$(5) \quad \begin{aligned} P^{\frac{1}{2}}a' &= A_n, & P^{\frac{1}{2}}c' &= C_n, & P^{\frac{1}{2}}e' &= E_n, \\ P^{\frac{1}{2}}b' &= B_n, & P^{\frac{1}{2}}d' &= D_n, & P^{\frac{1}{2}}f' &= F_n. \end{aligned}$$

Egli è chiaro che queste equazioni determinano i valori delle incognite $a', b', \text{etc.}$; ma siccome sostituendoli nella (2) tutti i termini acquistano il divisore $P^{\frac{1}{2}}$, che perciò è lecito di sopprimere, ne segue che per valori de' coefficienti dell'integrale si possono ritenere semplicemente le quantità $A_n, B_n, \text{etc.}$; e quindi l'integrale diviene in ultima analisi

$$(6) \quad A_n v_1^2 v_2^2 + 2B_n (v_1 + v_2) v_1 v_2 + C_n (v_1 + v_2)^2 + 2D_n v_1 v_2 + 2E_n (v_1 + v_2) + F_n = 0.$$

Abbiamo adottato per coefficienti di questa equazione l'indice n perchè serva a ricordare ch'essa esprime l'eliminata corrispondente ad un sistema di n equazioni; talchè quest'indice sarà 2, 3, etc. secondochè le equazioni date sono due, tre, etc.; ed in generale converremo di rappresentarla con

$$I_n(v_1, v_2) = 0.$$

Ma, come conseguenza di siffatta notazione, si comprende che nella ipotesi di $n=1$, le $A, B, \text{etc.}$ torneranno ad esprimere lo $a, b, \text{etc.}$

3. Sarebbe quasi superfluo di dichiarare che nel nostro caso la costante μ introdotta dalla integrazione non è punto arbitraria, dovendo in generale soddisfare a questa condizione che, dandosi un valore ad ar-

bitrio ad una delle variabili v_n e v_{n+1} , ne risulti per l'altra uno stesso valore tanto dal sistema delle date equazioni, quanto dall'integrale. Una delle ipotesi opportune si è di supporre $v_n = \infty$; ed allora se si eliminano tutte le n variabili dal sistema di $n+1$ equazioni

$$\begin{aligned} \downarrow(\infty, v_1) &= 0, \quad \downarrow(v_1, v_2) = 0, \quad \downarrow(v_2, v_3) = 0, \quad \dots, \quad \downarrow(v_{n-1}, v_n) = 0, \\ \downarrow_n(\infty, v_n) &= 0, \end{aligned}$$

si avrà nella risultante un'equazione che determina il conveniente valore della costante μ . Potrebbe invece suporsi $v_n = 0$, ed in questa ipotesi la prima ed ultima equazione sarebbero rimpiazzate da $\downarrow(0, v_1) = 0$ e $\downarrow_n(0, v_n) = 0$. Egli è poi manifesto che si ha

$$\begin{aligned} \downarrow(\infty, v_1) &= av_1^2 + 2bv_1 + c = 0, & \downarrow_n(\infty, v_n) &= A_nv_n^2 + 2B_nv_n + C_n = 0, \\ \downarrow(0, v_1) &= cv_1^2 + 2ev_1 + f = 0, & \downarrow_n(0, v_n) &= C_nv_n^2 + 2E_nv_n + F_n = 0. \end{aligned}$$

4. Osserveremo tuttavia che il teorema sulla forma della eliminata è affatto indipendente dalla determinazione della costante; il che in generale è una ricerca quasi così difficile quanto la stessa eliminazione tra le date equazioni. Ma pure volendo darne un esempio supporremo $n=2$; ed in tal caso, adottando la ipotesi di $v_n = \infty$, l'equazione che determina il valore di μ si avrà nella risultante delle tre equazioni

$$\begin{aligned} av_1^2 + 2bv_1 + c &= 0, \\ av_1^2 v_2^2 + 2b(v_1 + c_1)v_1 v_2 + c(v_1 + v_2)^2 + 2dv_1 v_2 + 2e(v_1 + v_2) + f &= 0, \\ A_1 v_1^2 + 2B_1 v_1 + C_1 &= 0. \end{aligned}$$

Se co' mezzi ordinarii si elimina v_1 tra le prime due, e si ponga per compendio

$$\begin{aligned} a &= (ad' - 2b'')(2be - c'' - cd) - (ae - bc)''^2, \\ 2\beta &= (ad' - 2b'')(bf - ce) - (af + cd - 2be)(ae - bc), \\ \gamma &= (ae - bc)(bf - ce) - \frac{1}{2}(af - c'')^2, \end{aligned}$$

si ha l'equazione di 2° grado in v_2

$$av_2^2 + 2\beta v_2 + \gamma = 0,$$

ed ora resterebbe ad eliminare v_2 tra questa ultima equazione, e quella

che precede. Ma attualmente possiamo tenere una via più semplice cercando se esista un valore di μ , che renda identici i coefficienti de' loro termini simili; chè allora esse daranno uno stesso valore per v . Così bisognerebbe che fossero verificate ad un tempo le tre condizioni

$$A_1 = a, \quad B_1 = \beta, \quad C_1 = \gamma,$$

le quali si riducono agevolmente alle seguenti

$$(ac - b^2)(c^2 + 2cd + af - 4be - 2\mu) = 0,$$

$$(bd - ae)(c^2 + 2cd + af - 4be - 2\mu) = 0,$$

$$(c^2 + af - 2be)^2 - 4(bd - ae - \mu)^2 = 0;$$

ma siccome il fattore ch' è comune alle due prime si può scrivere

$$c^2 + af - 2be = 2(bd - ae - \mu),$$

si fa manifesto che le due equazioni sono effettivamente identificate ponendo

$$c^2 + af - 2be = 2(bd - ae - \mu);$$

e quindi risulta

$$2\mu = c^2 + 2cd + af - 4be.$$

Ecco adunque il valore della costante μ conveniente al caso di due equazioni $\downarrow(v_0, v_1) = 0$, $\downarrow(v_1, v_2) = 0$; e però restano completamente determinati i coefficienti dell'eliminata $\downarrow_1(v_0, v_2) = 0$, ossia i coefficienti dell'equazione

$$A_1 v_0^2 + 2B_1(v_0 + v_2)v_0 v_2 + C_1(v_0 + v_2)^2 + 2D_1 v_0 v_2 + 2E_1(v_0 + v_2) + F_1 = 0,$$

non avendosi che a sostituire nelle formole (4) il valore trovato di μ ; sicchè risulta

$$(7) \quad \begin{cases} A_1 = (ac - b^2)[4be - (c + d)^2] - (bd - ae)^2 \\ B_1 = \frac{1}{2}(bd - ae)(af + c^2 - 2be) - (ac - b^2)(de - bf) \\ C_1 = (ac - b^2)(cf - e^2) - \frac{1}{2}(af + c^2 - 2be)^2 \\ D_1 = (bd - ae)(de - bf) - \frac{1}{2}[4be - (c + d)^2](af + c^2 - 2be) \\ E_1 = \frac{1}{2}(de - bf)(af + c^2 - 2be) - (bd - ae)(cf - e^2) \\ F_1 = (cf - e^2)[4be - (c + d)^2] - (de - bf)^2. \end{cases}$$

5. Merita di esser notato che, essendo già conosciuti i valori de' coefficienti dell' eliminata per due equazioni, sono perciò conosciuti anche quelli dell' eliminata per un numero di equazioni che sia una potenza di 2. Considerando per esempio 4 equazioni

$$1(v_0, v_1)=0 \quad , \quad 1(v_2, v_3)=0 \quad , \quad 1(v_4, v_5)=0 \quad , \quad 1(v_6, v_7)=0 \quad .$$

se si elimina v_1 tra le due prime, e v_3 tra le altre due, si hanno le due equazioni $1_1(v_0, v_2)=0$, $1_2(v_4, v_6)=0$; e quindi eliminandone v_2 , si ha evidentemente l'equazione $1_3(v_0, v_4)=0$, vale a dire

$$A_1 v_0^2 + 2B_1(v_0 + v_4)v_0 v_4 + C_1(v_0 + v_4)^2 + 2D_1 v_0 v_4 + 2E_1(v_0 + v_4) + F_1 = 0 \quad ,$$

dove le A_1, B_1 , etc: si compongono con le A, B , etc: nella stessa maniera con cui queste ultime lo sono con le a, b , etc: talchè si ha

$$A_1 = (A_1 C_1 - B_1^2)[(A_1 B_1 E_1 - (C_1 + D_1)^2) - (B_1 D_1 - A_1 E_1)^2]$$

$$B_1 = \text{etc:} \quad \quad \quad \text{etc:} \quad \quad \quad \text{etc:}$$

Similmente i coefficienti dell' eliminata per otto equazioni, A_2, B_2 , etc: saranno formati nello stesso modo con le A_1, B_1 , etc: ; e così di seguito (*).

(*) Il caso di due equazioni, o più generalmente di un numero di equazioni che sia una potenza di 2, sembra il solo per il quale il teorema sulla forma della eliminata possa essere verificato per le vie ordinarie. Supposto per esempio che si tratti di eliminare la variabile v_1 comune alle due prime equazioni, ordinandole rispetto a questa variabile le medesime divengono

$$(av_1^2 + 2bv_0 + c)v_1^2 + 2(bv_0^2 + d'v_0 + e)v_1 + (cv_0^2 + 2ev_0 + f) = 0 \quad ,$$

$$(av_1^2 + 2bv_4 + c)v_1^2 + 2(bv_4^2 + d'v_4 + e)v_1 + (cv_4^2 + 2ev_4 + f) = 0 \quad .$$

Dopo ciò, se si rendono uguali una volta i primi, ed una volta gli ultimi termini, e si prenda ogni volta la differenza de' risulti, sarà facile di vedere che ciascuna delle due differenze ha per fattore il binomio $v_0 - v_4$, ch'è lecito di sopprimere; e quindi si ottengono da esse per v_1 le due espressioni a 1° grado

$$v_1 = \frac{2(ac - bc)v_0 v_4 + (af - c^2)(v_0 + v_4) + 2(bf - ce)}{(2b^2 - ad')v_0 v_4 + (bc - ac)(v_0 + v_4) + (cd' - 2be)}$$

$$v_1 = \frac{(cd' - 2be)v_0 v_4 + (ce - bf)(v_0 + v_4) + (2e^2 - d'f)}{2(ac - bc)v_0 v_4 + (af - c^2)(v_0 + v_4) + 2(bf - ce)}$$

Ora basta uguagliare tra loro questi due valori di v_1 , per avere l' eliminata in v_0 e v_4 , la quale evidentemente è riducibile alla forma prescritta nel teorema.

6. Ponendo mente alle formole (5) si osserva che i valori di a', b' , etc: non sono più legittimi se sia $P=0$, vale a dire se il valore conveniente di μ verifichi l'equazione

$$P = \begin{vmatrix} A & B & D + \mu \\ B & C - 2\mu & E \\ D + \mu & E & F \end{vmatrix} = 0.$$

Intanto siccome le (3) in virtù delle (5) si mutano in

$$(8) \quad \begin{cases} C_a F_a - E_a^* = PA, & A_a F_a - D_a^* = P(C - 2\mu), & B_a D_a - A_a E_a = PE, \\ D_a E_a - B_a F_a = PB, & B_a E_a - C_a D_a = P(D + \mu), & A_a C_a - B_a^* = PF, \end{cases}$$

si vede che, se $P=0$, si annullano i primi membri di queste sei relazioni; e ciò dimostra che nella ipotesi attuale il primo membro della (6) è un quadrato perfetto, che può mettersi in evidenza moltiplicandola per A_a , e poi cangiando i prodotti $A_a C_a$, $A_a E_a$, $A_a F_a$ in D_a^* , $B_a D_a$, D_a^* . Da ciò risulta che, se $P=0$, l'eliminata corrispondente al dato sistema di equazioni è della forma

$$[A_a v_a v_a + B_a (v_a + v_a) + C_a]^2 = 0.$$

7. Le espressioni di A_a , B_a , etc: definite nelle (4) sono suscettibili di una notabilissima trasformazione. Quelle formole infatti equivalgono ad

$$\begin{aligned} A_a &= CF - E^* - 2F\mu, & D_a &= BE - CD + (2D - C + 2\mu)\mu, \\ B_a &= DE - BF + E\mu, & E_a &= BD - AE + B\mu, \\ C_a &= AF - D^* - (2D + \mu)\mu, & F_a &= AC - B^* - 2A\mu; \end{aligned}$$

ma siccome de' due determinanti

$$S = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}, \quad R = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix},$$

il primo, in virtù delle (1), è reciproco del secondo, e quindi si ha

$$(9) \quad \begin{cases} Ra = CF - E^*, & Rc = AF - D^*, & Re = BD - AE, \\ Rb = DE - BF, & Rd = BE - CD, & Rf = AC - B^*, \end{cases}$$

così le formole precedenti si tramutano nelle seguenti

$$(10) \quad \begin{cases} A_n = Ra - 2F_{\mu} & , & D_n = Rd + (2D - C + 2\mu)\mu \\ B_n = Rb + E_{\mu} & , & E_n = Re + B_{\mu} \\ C_n = Rc - (2D + \mu)\mu & , & F_n = Rf - 2A_{\mu} \end{cases}$$

Cade ora sott'occhio che, se si abbia $\mu=0$, i valori di A_n, B_n , etc: si riducono ad Ra, Rb , etc:; e l'eliminata, soppresso il fattore R , sarà semplicemente $\downarrow(v_o, v_i)=0$, ossia

$$av_n^* + 2b(v_o + v_n)v_o v_n + c(v_o + v_n)^2 + 2dv_o v_n + 2e(v_o + v_n) + f = 0 .$$

In questa ipotesi adunque i coefficienti della eliminata risultano uguali a quelli de' rispettivi termini omologhi di ciascuna delle date n equazioni; ed è conseguenza di questo fatto che: *il sistema delle dette n equazioni non può, in generale, coesistere con l'equazione $\downarrow(v_o, v_i)=0$; ma, perchè ciò possa aver luogo, è necessario e basta che il valore della costante μ corrispondente a quelle n equazioni, verifichi la relazione $\mu=0$* , la quale adunque esprime la condizione per la coesistenza delle $n+1$ equazioni

$$\downarrow(v_o, v_i)=0 \quad , \quad \downarrow(v_i, v_e)=0 \quad , \quad \dots \quad , \quad \downarrow(v_{n-1}, v_n)=0 \quad , \\ \downarrow(v_o, v_n)=0 \quad ,$$

e dovrà potersene dedurre con la eliminazione di tutte le variabili. Ma dovendo queste variabili sparire dal finale risultamento, sarà lecito di dare un valore arbitrario ad una di esse, e porro per esempio $v_o=\infty$; chè allora la condizione, di cui si tratta, potrà ottenersi molto più agevolmente eliminando tutte le n variabili dalle $n+1$ equazioni

$$av_i^* + 2bv_i + c = 0 \quad , \\ \downarrow(v_i, v_e)=0 \quad , \quad \downarrow(v_e, v_o)=0 \quad , \quad \dots \quad , \quad \downarrow(v_{n-1}, v_n)=0 \quad , \\ av_n^* + 2bv_n + c = 0 \quad .$$

In breve la condizione $\mu=0$ non è che la risultante delle $n+1$ equazioni.

8. Segue da ciò che precede che, in generale, non esiste un sistema di valori delle variabili tale che possano risultare tra loro uguali le due variabili estreme v_o e v_n ; dappoichè, cangiando nell'ultima delle date n

equazioni v_x in v_r , la quistione dipenderebbe dal sistema incompatibile

$$\pm(v_0, v_1)=0, \pm(v_1, v_2)=0, \dots, \pm(v_{n-1}, v_n)=0, \pm(v_n, v_0)=0;$$

e, perchè il problema fosse possibile, bisognerebbe che fosse soddisfatta una certa relazione tra le costanti, che già si è detto come possa ottenersi. Ma se questa relazione è realmente verificata, il problema da impossibile diverrà indeterminato, ed ammetterà un numero infinito di soluzioni, talchè dando un valore arbitrario ad una delle variabili, quelli delle variabili estreme v_r e v_n risulteranno sempre tra loro uguali.

Supponiamo ora che le date equazioni siano di numero pari $n=2r$. Considerando a parte le due eliminate corrispondenti alle prime r equazioni ed alle rimanenti, questo due eliminate saranno

$$A_r v_r^2 + 2B_r(v_0 + v_r)v_0 v_r + C_r(v_0 + v_r)^2 + 2D_r v_0 v_r + 2E_r(v_0 + v_r) + F_r = 0,$$

$$A_r v_r^2 + 2B_r(v_r + v_n)v_r v_n + C_r(v_r + v_n)^2 + 2D_r v_r v_n + 2E_r(v_r + v_n) + F_r = 0;$$

ed ordinate l'una rispetto a v_0 , l'altra rispetto a v_n , diverranno

$$[A_r v_r^2 + 2B_r v_r + C_r]v_0^2 + 2[B_r v_r^2 + (C_r + D_r)v_r + E_r]v_0 + C_r v_r^2 + 2E_r v_r + F_r = 0,$$

$$[A_r v_r^2 + 2B_r v_r + C_r]v_n^2 + 2[B_r v_r^2 + (C_r + D_r)v_r + E_r]v_n + C_r v_r^2 + 2E_r v_r + F_r = 0,$$

Sotto questa forma è palese che, qualunque sia il valore di v_r , le due equazioni hanno le medesime radici; e quindi v_0 o v_n saranno radici sia dell'una, sia dell'altra. Volendo adunque che i valori di v_0 e v_n siano tra loro uguali, ciò importa che l'una o l'altra equazione abbia le radici uguali, e sarà perciò un quadrato perfetto. Così:

Ammettendo che debbano coesistere le $2r$ equazioni

$$\pm(v_0, v_1)=0, \pm(v_1, v_2)=0, \dots, \pm(v_{n-1}, v_n)=0, \dots, \pm(v_n, v_0)=0,$$

l'eliminata in v_0 e v_r , corrispondente alle prime, o alle ultime r equazioni, sarà un quadrato perfetto; e però se s'indichi con μ_r il conveniente valore della costante, sarà soddisfatta la relazione

$$P = \begin{vmatrix} A & B & D + \mu_r \\ B & C - 2\mu_r & E \\ D + \mu_r & E & F \end{vmatrix} = 0.$$

9. Le formole del numero 7 conducono agevolmente ad uno sviluppo

di questo determinante P , che merita per diverse applicazioni di esser messo in veduta. Tenendo presente la notazione adottata nel n.° 2 pel reciproco di P , si ha dapprima

$$P = AA_n + BB_n + (D + \mu_n)D_n ;$$

indi sostituendo ad A_n, B_n, D_n i valori dati nelle (10), ed osservando che, per essere il determinante S reciproco di R , si ha

$$aA + bB + dD = R ,$$

e che si ha di più

$$AF - D^2 = eR , \quad BE - CD = dR ,$$

$$af - d^2 = C , \quad be - cd = D ,$$

si otterrà

$$P = R^2 - 2R(c-d)\mu_n + (4be - 4cd + af - d^2)\mu_n^2 + \mu_n^4 ;$$

o sott'altra forma

$$P = [R - (c-d)\mu_n]^2 - (e^2 + 2cd + af - 4be - 2\mu_n)\mu_n .$$

10. Affinchè i valori di A_n, B_n , etc: definiti dalle formole (4) possano esprimere i coefficienti dell'eliminata corrispondente al dato sistema di n equazioni, è uopo che la costante μ riceva una conveniente determinazione; ma se questa costante si riguarda come arbitraria, e dinotato con μ , un suo valore particolare qualunque, si ponga per compendio

$$A^{(1)} = F(C - 2\mu_n) - E^2 , \quad D^{(1)} = BE - (C - 2\mu_n)(D + \mu_n) ,$$

$$B^{(1)} = E(D + \mu_n) - DF , \quad E^{(1)} = B(D + \mu_n) - AE ,$$

$$C^{(1)} = AF - (D + \mu_n)^2 , \quad F^{(1)} = A(C - 2\mu_n) - B^2 ;$$

ed inoltre

$$\mathfrak{F}^{(1)}(v_r, v_s) =$$

$$A^{(1)}v_r^2 v_s^2 + 2B^{(1)}(v_r + v_s)v_r v_s + C^{(1)}(v_r + v_s)^2 + 2D^{(1)}v_r v_s + 2E^{(1)}(v_r + v_s) + F^{(1)} ,$$

e quindi si consideri il sistema di n equazioni

$$\mathfrak{F}^{(1)}(v_0, v_1) = 0 , \quad \mathfrak{F}^{(1)}(v_r, v_s) = 0 , \quad \dots , \quad \mathfrak{F}^{(1)}(v_{n-1}, v_n) = 0 ,$$

corrispondenti ordinatamente ai particolari valori della costante, μ ,

$\mu_1, \dots, \mu_n$, questo sistema sarà dotato della proprietà medesima sviluppata nel n. 4; cioè a dire che:

Se si eliminano le variabili intermedie $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$, l'eliminata nelle variabili estreme v_0 e v_n è un'equazione dello stesso grado e della stessa forma di ciascuna di quelle da cui trae origine.

Per dimostrarlo basta osservare che l'equazione $\downarrow^{(n)}(v_r, v_s) = 0$ è un integrale particolare dell'equazione $\frac{\partial v_r}{\sqrt{V_r}} = \pm \frac{\partial v_s}{\sqrt{V_s}}$, poichè si deduce dal suo integrale completo con dare alla costante arbitraria il valore particolare μ ; e da ciò risulta che questa equazione differenziale è la stessa che si otterrebbe applicando all'equazione $\downarrow^{(n)}(v_r, v_s) = 0$ la medesima trasformazione operata nel n. 4. a riguardo dell'equazione $\downarrow(v_r, v_s) = 0$. Adunque, se si applica questa trasformazione a ciascuna delle attuali equazioni si avrà successivamente

$$\frac{\partial v_0}{\sqrt{V_0}} = \frac{\partial v_1}{\sqrt{V_1}} = \frac{\partial v_2}{\sqrt{V_2}} = \dots = \frac{\partial v_n}{\sqrt{V_n}};$$

quindi tra le variabili estreme v_0 e v_n si ha l'equazione differenziale

$$\frac{\partial v_0}{\sqrt{V_0}} = \pm \frac{\partial v_n}{\sqrt{V_n}};$$

ed integrandola si otterrà l'eliminata nelle dette variabili. Ma questo integrale è sempre l'equazione (6); dunque l'eliminata è, come voleva dimostrarsi, un'equazione della stessa forma di ciascuna di quelle da cui trae origine.

ARTICOLO II.

Un caso particolare della precedente eliminazione.

11. La quistione di cui ci siamo occupati offre un caso particolare, cui potrebbe ridursi il caso generale per via di semplicissime trasformazioni, o che perciò merita più accurato esame. Quando nelle date equazioni mancano i due termini in cui figura a 1° grado il binomio $v_r + v_s$, questi due termini mancheranno pure nell'eliminata, perchè essendo $b=0$, $c=0$, nelle (1) si ha pure $B=0$, $E=0$, e quindi si avrà nelle (4) $B_n=0$, $E_n=0$. Adunque, supposto in generale

$$\downarrow(v_r, v_s) = av_r^2 v_s^2 + e(v_r + v_s)^2 + 2dv_r v_s + f = 0,$$

ovvero (n° 4)

$$\ddagger(v_i, v_n) = ac_i v_i^* + c(v_i^* + v_n^*) + 2d' v_i v_n + f = 0,$$

se sia dato il sistema di n equazioni

$$\ddagger(v_0, v_n) = 0, \quad \ddagger(v_1, v_n) = 0, \quad \dots, \quad \ddagger(v_{n-1}, v_n) = 0,$$

eliminandone le variabili intermedie, l' eliminata nelle variabili estreme v_0 e v_n sarà un' equazione della forma

$$(11) \quad A_n v_0^* v_n^* + C_n (v_0 + v_n)^2 + 2D_n v_0 v_n + F_n = 0;$$

ed in virtù delle (1) e (4) si avrà

$$\begin{aligned} A_n &= ac (af - d^2 - 2\mu), \\ C_n &= afe^2 - (cd - \mu)^2, \\ D_n &= (cd - \mu)(af - d^2 - 2\mu), \\ F_n &= cf(af - d^2 - 2\mu). \end{aligned}$$

12. In quanto alla determinazione della costante μ questa ricerca può esser sempre regolata con le norme già date per le equazioni complete (n° 3); ma nel caso attuale è possibile di eludere le difficoltà che presenta il caso generale. Noi cominceremo per osservare che se l' equazione (11) si divida per $c(af - d^2 - 2\mu)$, e si ponga

$$(12) \quad \frac{afe^2 - (cd - \mu)^2}{c(af - d^2 - 2\mu)} = c_n, \quad \frac{cd - \mu}{c} = d_n,$$

la medesima diviene

$$(13) \quad av_0^* v_n^* + c_n (v_0 + v_n)^2 + 2d_n v_0 v_n + f = 0;$$

e sotto questa forma ha il vantaggio di non avere che due soli coefficienti a doversi determinare c_n o d_n , perchè nel primo ed ultimo termine sono riprodotte le stesse quantità a ed f che figurano ne' corrispondenti termini omologhi delle date equazioni. Ma oltre a ciò in luogo di μ converremo di adottare uno di quei due coefficienti come costante della in-

tegrazione; ed allora, eliminando μ dalle due equazioni (12), tra i due coefficienti c_n e d_n si ha la relazione

$$d_n^2 + 2c_n d_n + \frac{af - d^2 - 2cd}{c} c_n - af = 0,$$

la quale determina l'uno in funzione dell'altro, ed alla quale può anche darsi la forma

$$(14) \quad c(af - d_n^2 - 2c_n d_n) = c_n(af - d^2 - 2cd).$$

13. Prima di occuparci della determinazione de' due coefficienti faremo due brevi osservazioni intorno alla novella forma della eliminata.

1. Ammettendo che sia nullo il valore di c_n , l'eliminata diviene

$$ac_n^2 v_n^2 + 2d_n v_n + f = 0;$$

ma siccome nella stessa ipotesi la relazione (14) si riduce a

$$d_n^2 = af,$$

ne segue che il primo membro della eliminata è un quadrato perfetto, che può mettersi in evidenza moltiplicandola per a , e poi cangiando af in d_n^2 ; e perciò, se si abbia $c_n = 0$, l'eliminata corrispondente alle date equazioni è della forma

$$(av_n v_n + d_n)^2 = 0.$$

È evidente che si perviene alla stessa conclusione, se invece si supponga $d_n^2 = af$, perchè dalla (14) risulta $c_n = 0$.

11. Ammettendo in secondo luogo che si abbia $c_n = c$, si rileva dalla (14) che debba essere ancora $d_n^2 = d$. Laonde affinchè i coefficienti dell'eliminata possano risultare uguali a quelli de' corrispondenti termini omologhi di ciascuna delle date equazioni basta che sia verificata la relazione $c_n = c$; la quale adunque è la condizione affinchè le date n equazioni possano coesistere con l'altra $\downarrow (v_n, v_n) = 0$.

14. Ciò premesso noi passeremo alla determinazione de' coefficienti c_n e d_n , prendendo più specialmente a considerare il primo c_n ; e seguiremo a quest'uopo il metodo già prescritto (n° 3) per determinare in generale la costante μ ; vale a dire supporremo $v_n = \infty$, ed otterremo l'equazione,

che determina il valore di c_n , eliminando tutte le n variabili dalle $n+1$ equazioni

$$\begin{aligned} ac_n^2 + c &= 0, \\ \pm(v_1, v_2) &= 0, \quad \pm(v_2, v_3) = 0, \quad \dots, \quad \pm(v_{n-1}, v_n) = 0, \\ av_n^2 + c_n &= 0; \end{aligned}$$

la prima ed ultima delle quali sono ciò che divengono rispettivamente la prima delle date equazioni e la (13) per la ipotesi di $v_n = \infty$.

Ora noi vedremo che il valore di c_n si può sempre esprimere razionalmente; ma in quanto a d_n possiamo solo limitarci ad affermare che può ottenersi lo stesso intento se il numero delle equazioni è pari. In fatti supponendo $n=2r$ l'eliminata diviene

$$(15) \quad ac_r^2 v_r^2 + c_{rr}(v_o + v_{rr})^2 + 2d_{rr} v_o v_{rr} + f = 0.$$

Intanto, se immaginiamo le due eliminate corrispondenti rispettivamente alla prima ed alla seconda metà delle date $2r$ equazioni, potremo rappresentarle con

$$\begin{aligned} ac_r^2 v_r^2 + c_r(v_o + v_r)^2 + 2d_r v_o v_r + f &= 0, \\ ac_r^2 v_r^2 + c_r(v_r + v_{rr})^2 + 2d_r v_o v_{rr} + f &= 0; \end{aligned}$$

ma, ponendovi $v_r = \infty$, avremo

$$ac_r^2 + c_r = 0, \quad ac_{rr}^2 + c_{rr} = 0,$$

e ne risulta evidentemente

$$v_o + v_{rr} = 0, \quad av_o v_{rr} = c_r.$$

Per queste formole la (15) si riduce a

$$2c_r d_{rr} + c_r^2 + af = 0;$$

e quindi si ha

$$(16) \quad d_{rr} = -\frac{c_r^2 + af}{2c_r}.$$

Così il valore di d_{rr} è espresso razionalmente per mezzo di c_r ; ma do-

vedendo essere razionale, come vedremo or ora, il valore di c , ne segue che della stessa natura è quello di d .

15. Prima di occuparci in generale della ricerca di c , dobbiamo esaminare brevemente i due casi particolari di $n=2$ ed $n=3$. Supponendo adunque le due equazioni

$$av_1^2 + c(v_1^2 + v_2^2) + 2d'v_1v_2 + f = 0,$$

$$av_2^2 + c(v_1^2 + v_2^2) + 2d''v_1v_2 + f = 0,$$

e l'eliminata

$$av_1^2 + c_1(v_1^2 + v_2^2) + 2d_1v_1v_2 + f = 0,$$

l'equazione che determina il valore di c , sarà la risultante delle tre equazioni

$$av_1^2 + c_1(v_1^2 + v_2^2) + 2d'v_1v_2 + f = 0,$$

$$av_2^2 + c = 0, \quad av_1^2 + c = 0.$$

Moltiplicando la prima per a , cominceremo per sostituirvi $-c$ o $-c_1$ in luogo di av_1^2 ed av_2^2 ; indi riducendo in un membro il termine in v_1v_2 , e ripetendo la medesima sostituzione, avremo l'equazione di 1° grado in c_1 ,

$$(17) \quad 4cd''c_1 = (c^2 - af),$$

ed in conseguenza sarà

$$c_1 = \frac{(c^2 - af)}{4cd''}.$$

Inoltre, essendo pari il numero delle date equazioni, per determinare d , possiamo applicare la formola (16); e quindi, siccome c , non differisce da c , avremo

$$(18) \quad d_1 = -\frac{c^2 + af}{2c};$$

e per tal guisa l'eliminata corrispondente alle due equazioni date sarà in fine

$$(19) \quad av_1^2 + \frac{(c^2 - af)}{4cd''}(v_1^2 + v_2^2) - \frac{c^2 + af}{c}v_1v_2 + f = 0.$$

Si ritroverebbe questa equazione, sia cercandola direttamente con un

metodo già indicato (nota al n° 5), sia ponendo $b=0$, $c=0$ nelle espressioni di A , B , etc. determinate al n° 4.

16. Assai men semplice è il caso di $n=3$. Supposte le tre equazioni

$$\frac{1}{2}(v_0, v_1)=0 \quad , \quad \frac{1}{2}(v_1, v_2)=0 \quad , \quad \frac{1}{2}(v_2, v_3)=0 \quad ,$$

e l'eliminata

$$av_1^2 v_2^2 + c_3(v_0 + v_2)^2 + 2d_3 v_0 v_2 + f = 0 \quad ,$$

sostituiremo allo due prime l'eliminata corrispondente

$$av_1^2 v_2^2 + c_3(v_0 + v_2)^2 + 2d_3 v_0 v_2 + f = 0 \quad ;$$

e siccome questa e la precedente, ponendo $v_3 = \infty$, si riducono ad

$$av_1^2 + c_3 = 0 \quad , \quad av_2^2 + c_3 = 0 \quad ,$$

così eliminando v_1 e v_2 dalla terza delle equazioni date avremo la relazione

$$(20) \quad 4d^2 c_3 c_2 = [cc_3 - af - c_3(c_2 - c)]^2 \quad ,$$

la quale è di 2° grado rispetto a c_2 , ma una semplice osservazione rileva ch'è possibile di dedurne un'altra di 4° grado. Noi vediamo in fatti che la (20) è soddisfatta supponendovi $c_2=c$, perchè si riduce alla (17), uguaglianza che diviene una identità col sostituirvi il valore, che essa stessa dà per c . Da ciò risulta che se questa sostituzione si faccia invece nella relazione (20) la medesima dovrà essere divisibile per $c_2 - c$; o quindi più non rimane che a porre in evidenza l'altro fattore.

Dividendo i due membri della (20) pe'due membri della (17), e quindi liberando da fratti, si ha

$$c_2(c^2 - af)^2 = c[cc_2 - af - c_2(c_2 - c)]^2 \quad ;$$

ma essendo identicamente

$$c^2 - af = cc_2 - af - c(c_2 - c) \quad ,$$

ed inoltre

$$cc_2 - af - c_2(c_2 - c) = cc_2 - af - c_2(c_2 - c) \quad ,$$

la relazione di poc' anzi diviene

$$c_2[(cc_2 - af) - c(c_2 - c)]^2 = c[cc_2 - af - c_2(c_2 - c)]^2 \quad .$$

Sviluppando i quadrati col tenere in vista i due binomii $(cc_2 - af)$ o

($c_4 - c$), è evidente che si distruggono i termini provenienti da' doppi prodotti, e ne risulta

$$cc_2(c_3 - c)(c_4 - c)^2 = (c_3 - c)(cc_4 - af)^2.$$

In fine sopprimendo il fattore $c_3 - c$ si ha la relazione di 1° grado in c_3 ,

$$cc_2(c_4 - c)^2 = (cc_4 - af)^2;$$

e si ottiene in conseguenza

$$c_3 = \frac{(cc_4 - af)^2}{c(c_4 - c)^2}.$$

Se piaccia di eliminare c_4 non si ha che a sostituirgli il valore che ne dà la (17), e si ottiene in tal guisa

$$(21) \quad c_3 = c \frac{[(c^2 - af)^2 - 4af d'^2]^2}{[(c^2 - af)^2 - 4c^2 d'^2]^2}.$$

17. L'analisi che precede ci guida a determinare in generale il valore di c_n . Supponendo adunque n equazioni e l'eliminata

$$av_n^2 + c_n(v_0 + v_n)^2 + 2d_n v_0 v_n + f = 0,$$

cominceremo per sostituire alle prime $n - 1$ equazioni l'eliminata corrispondente

$$av_n^2 v_{n-2} + c_{n-1}(v_0 + v_{n-1})^2 + 2d_{n-1} v_0 v_{n-1} + f = 0;$$

indi supponendo $v_0 = \infty$, ridurremo questa equazione e la precedente ad

$$av_{n-1}^2 + c_{n-1} = 0, \quad av_n^2 + c_n = 0;$$

ed in seguito elimineremo v_{n-1} e v_n dall'ultima delle date equazioni

$$av_{n-2}^2 v_n^2 + c(v_{n-1}^2 + v_n^2) + 2d'v_{n-1} v_n + f = 0.$$

Si perviene in tal guisa alla relazione

$$4d'^2 c_{n-1} c_n = (cc_{n-1} + cc_n - c_{n-1} c_n - af)^2,$$

e cambiandovi n in $n-1$ avremo ancora

$$4d'^2 c_{n-1} c_{n-1} = (cc_{n-2} + cc_{n-1} - c_{n-1} c_{n-2} - af)^2.$$

Dividendo le due ultime relazioni membro a membro, e liberando da fratti, verrà

$$c_n [ce_{n-1} + ce_{n-2} - c_{n-1}c_{n-2} - af]^2 = c_{n-1} [ce_{n-2} + ce_{n-3} - c_{n-2}c_{n-3} - af]^2.$$

Si soddisfa a questa relazione ponendo $c_n = c_{n-1}$; e quindi, ridotta a zero, sarà divisibile per $c_n - c_{n-1}$. Può subito mettersi in evidenza l'altro fattore dandole la forma

$$c_n [(ce_{n-1} - af) - c_{n-1}(e_{n-1} - c)]^2 = c_{n-1} [(ce_{n-1} - af) - c_n(e_{n-1} - c)]^2;$$

poichè si vede che, se si sviluppano i quadrati col tenere in vista i binomii $(ce_{n-1} - af)$ e $(e_{n-1} - c)$, si distruggono i termini provenienti da'doppi prodotti, o si ottiene

$$c_{n-1}c_n(e_n - e_{n-1})(e_{n-1} - c)^2 = [c_n - c_{n-1}][ce_{n-1} - af]^2.$$

Sopprimendo in fine il fattore $c_n - c_{n-1}$, si ha la relazione di 1° grado in c ,

$$e_{n-1}c_n(e_{n-1} - c)^2 = [ce_{n-1} - af]^2,$$

e ne risulta

$$(22) \quad c_n = \frac{(ce_{n-1} - af)^2}{e_{n-1}(e_{n-1} - c)^2}.$$

Questa formola fa dipendere il valore di c_n da quelli di c_{n-1} e e_{n-1} ; ed essendo già noti i valori di c_1 e e_1 , si vede che la quistione è risolta per qualunque valore dell'indice n .

ARTICOLO III.

Alcune formole di geometria analitica.

18. Supponendo che x_n ed y_n siano le coordinate di un punto V_n di una conica V data dall'equazione

$$V = y^2 + lx^2 + mx = 0,$$

dinoteremo con r_n il rapporto $y_n : x_n$; rapporto che chiameremo *elemento del punto* V_n . E dovendo sussistere le due relazioni

$$y_n = r_n x_n, \quad y_n^2 + lx_n^2 + mx_n = 0,$$

le coordinate del punto in funzione del suo elemento saranno espresse da

$$x_a = -\frac{m}{v_a + l} \quad , \quad y_a = -\frac{mv_a}{v_a + l} .$$

Quando il punto V_a coincide con l'origine si ha $v_a = \infty$; e coincidendo col punto della conica diametralmente opposto all'origine, sarà $v_a = 0$.

19. Per le convenzioni adottate una corda $V_r V_s$ della conica V avrebbe per equazione

$$y - y_r = \frac{y_s - y_r}{x_s - x_r} (x - x_r) ;$$

ma quindi in virtù delle precedenti espressioni di x_a ed y_a , questa equazione prenderà la forma notevole

$$(l - v_r v_s) x + (v_r + v_s) y + m = 0 .$$

Se la corda è parallela all'asse delle ascisse fra gli elementi delle sue estremità v_r e v_s sussisterà la relazione

$$l - v_r v_s = 0 ;$$

e se invece è parallela a quello delle ordinate si avrà

$$v_r + v_s = 0 .$$

Ammettendo poi che la corda $V_r V_s$ debba passare per un punto (x, β) ovunque situato nel piano della conica V , gli elementi v_r e v_s dovranno soddisfare alla relazione

$$(l - v_r v_s) x + (v_r + v_s) \beta + m = 0 ,$$

la quale in generale è della forma

$$L v_r v_s + M (v_r + v_s) + N = 0 .$$

Ma reciprocamente, supponendo data una relazione di questa forma, vale a dire supponendo che le costanti L, M, N abbiano valori qualunque assegnati, è chiaro che ogni corda della conica V , la quale congiunga

due punti della curva i di cui elementi soddisfanno a siffatta relazione, passerà per un punto determinato dalle coordinate

$$\alpha = -\frac{mL}{iL+N}, \quad \beta = \frac{mM}{iL+N};$$

e quindi risulta che la proposta relazione esprime il sistema delle corde della conica V , le quali circolano intorno ad un punto fisso. È poi manifesto che questo punto starebbe sull'asse delle ascisse, o sù quello delle ordinate, secondochè fosse o $M=0$, o $L=0$.

20. Immaginiamo un'altra conica U rappresentata dall'equazione

$$U = ax^2 + 2pxy + y^2 + 2ax + 2ay + c = 0.$$

È noto che, se questa conica sia toccata dalla retta

$$px + qy + r = 0,$$

tra le costanti delle due linee sussisterà la relazione

$$\begin{vmatrix} 0 & p & q & r \\ p & a & \beta & \delta \\ q & \beta & \gamma & \epsilon \\ r & \delta & \epsilon & \varphi \end{vmatrix} = 0;$$

la quale, ponendo i due determinanti

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & \beta & \delta \\ \beta & \gamma & \epsilon \\ \delta & \epsilon & \varphi \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & \delta_1 \\ \beta_1 & \gamma_1 & \epsilon_1 \\ \delta_1 & \epsilon_1 & \varphi_1 \end{vmatrix},$$

il secondo de' quali sia il reciproco del primo, si sviluppa in

$$a_1 p^2 + 2\beta_1 pq + \gamma_1 q^2 + 2\delta_1 pr + 2\epsilon_1 qr + \varphi_1 r^2.$$

Ma supponendo che la retta tangente di U sia la corda $V_r V_s$ della conica V poc' anzi considerata, sarà

$$p = l - v_r v_s, \quad q = v_r + v_s, \quad r = m;$$

e quindi messo per compendio ed uniformità di scrittura

$$(23) \quad \begin{cases} a = a_1 & , & d = -(la + m s_1) , \\ b = -\beta_1 & , & e = l\beta_1 + m s_1 , \\ c = \gamma_1 & , & f = l^2 s_1 + 2lm s_1 + m^2 v_1 , \end{cases}$$

la condizione perchè la detta corda sia tangente di U risulterà espressa da

$$(24) \quad av_1^2 v_1^* + 2b(v_1 + v_1^*)v_1 v_1^* + c(v_1 + v_1^*)^2 + 2dv_1 v_1^* + 2e(v_1 + v_1^*) + f = 0 .$$

21. Le formole precedenti danno luogo ad alcune utilissime relazioni. Siccome il determinante Δ_1 è reciproco di Δ , per una proprietà conosciuta de' determinanti reciprochi avremo

$$(25) \quad \begin{cases} \Delta a = \gamma_1 v_1 - s_1^2 & , & \Delta \beta = \beta_1 s_1 - \beta_1 v_1 & , & \Delta \gamma = s_1 v_1 - \beta_1^2 , \\ \Delta \delta = \beta_1 s_1 - \gamma_1 \beta_1 & , & \Delta \epsilon = \beta_1 \beta_1 - s_1 s_1 & , & \Delta \zeta = s_1 \gamma_1 - \beta_1^2 ; \end{cases}$$

ma ricavandosi dalle (23)

$$\begin{aligned} a_1 &= a & , & & m s_1 &= -(la + d) , \\ \beta_1 &= -b & , & & m s_1 &= -(lb + e) , \\ \gamma_1 &= c & , & & m^2 v_1 &= l^2 a + 2ld + f , \end{aligned}$$

se si faccia per compendio

$$(26) \quad \begin{cases} A = cf - e^2 & , & B = de - bf & , & C = af - d^2 , \\ D = be - cd & , & E = bd - ae & , & F = ac - b^2 , \end{cases}$$

e pongasi inoltre

$$(27) \quad \begin{cases} x' = l^2 F - 2lD + A & , & z' = m(lF - D) , \\ \beta' = lE - B & , & e' = mE , \\ \gamma' = C & , & \varphi' = m^2 F , \end{cases}$$

le relazioni (25) diverranno

$$(28) \quad \begin{aligned} \Delta m^2 a &= x' & , & & \Delta m^2 \gamma &= \gamma' & , & & \Delta m^2 z &= z' , \\ \Delta m^2 \beta &= \beta' & , & & \Delta m^2 \delta &= \delta' & , & & \Delta m^2 \varphi &= \varphi' . \end{aligned}$$

Segue da queste ultime relazioni che la funzione

$$U' = a'x^2 + 2\beta'xy + \gamma'y^2 + 2\beta'x + 2a'y + \gamma'$$

differisce dalla funzione U soltanto per un fattore costante, essendo evidentemente

$$U' = \Delta m^2 U;$$

e quindi la conica U' non è diversa dalla conica U .

22. Supponiamo ora che, invece di esser data la conica U , sia data la relazione (24), vale a dire che le costanti a, b, c, d, e, f abbiano valore dati qualunque, ed immaginiamo descritta la conica dell'equazione $U' = 0$, i di cui coefficienti a', β', γ' , etc. sono definiti dalle (27). Conducendo una tangente a questa conica, e supposto che incontri la conica V in due punti qualunque, è manifesto che gli elementi di questi punti debbono verificare la data relazione; e, viceversa, ogni retta che congiunge due punti della conica V , i di cui elementi soddisfano a questa relazione, è necessariamente una tangente della conica U' ; e siamo così condotti alla seguente proposizione:

Data tra le variabili v, v , la relazione (24), e data inoltre una conica V , l'involuppo di tutte le corde di questa conica, le quali uniscono a due a due quei punti della curva i di cui elementi soddisfano alla data relazione, è un'altra conica U' , la di cui equazione ha per coefficienti i valori di a', β', γ' , etc. definiti dalle formole (27).

23. Bisogna osservare che le formole (27) divengono insignificanti, se svaniscono tre de'sei binomii (26) perchè gli altri tre svaniscono pur essi; ma allora è evidente che il primo membro della data relazione (24) è un quadrato perfetto, che può mettersi in evidenza moltiplicandola per a , e poi cambiando i prodotti ac, ae, af in b^2, bd, d^2 . In questo caso adunque la relazione si trasforma in

$$[av, v, + b(v, + v,) + d]^2 = 0;$$

e perciò l'involuppo si riduce al punto (n° 19) risultante dalla radice

$$av, v, + b(v, + v,) + d = 0.$$

24. Supponendo che nell'equazione della conica U manchino i due termini in xy ed y , nella relazione (24) mancheranno i due termini i quali

contengono a 1° grado il binomio $v_r + v_s$, dappoichè essendo $\beta = 0$ ed $\varepsilon = 0$, nelle formole (23) si ha puro $b = 0$, ed $e = 0$, e quindi la relazione (24) diviene (*)

$$av_r v_s + c(v_r + v_s)^2 + 2dv_r v_s + f = 0.$$

25. Reciprocamente, se è data una relazione di questa forma, l'equazione dell'involuppo dovrà ridursi ad

$$a'x^2 + \gamma'y^2 + 2\delta'x + \epsilon' = 0;$$

poichè essendo $b = 0$ ed $e = 0$, nelle formole (27) risulta $\beta' = 0$ ed $\alpha' = 0$. Inoltre supposto che la conica V sia un cerchio e quindi $l = 1$, avremo

$$a' = c(a + 2d + f), \quad \gamma' = af - d^2, \quad \delta' = mc(a + d), \quad \epsilon' = m'ac,$$

e ne segue che l'involuppo è un cerchio anch'esso quando sia

$$af - d^2 = c(a + 2d + f),$$

o sott' altra forma

$$(c + d)^2 = (a - d)(c - f).$$

(*) È questa in particolare la forma cui si riduce la relazione (24) allorchè le due coniche V ed U sono cerchi entrambi, e sia preso per asse delle ascisse il diametro di V che passa pel centro di U . Chiamando r il raggio di U e p l'ascissa del suo centro, si ha evidentemente

$$a = r^2 - 1, \quad b = -p, \quad c = p^2 - r^2;$$

o però, essendo $l = 1$, detto R il raggio di V , le formole (23) diverranno in questo caso

$$a = p^2 - r^2, \quad c = -r^2, \quad d = r^2 + p(2R - p), \quad f = (2R - p)^2 - r^2.$$

Che se pongasi $2R - p = q$, si avrà più semplicemente

$$a = p - r^2, \quad c = -r^2, \quad d = r^2 + pq, \quad f = q^2 - r^2,$$

e si avrà inoltre

$$c + d = d' = pq.$$

In queste formole l'ascissa p del centro del cerchio U può sempre riguardarsi come positiva. Rispetto a q bisogna osservare che questo simbolo esprime la distanza del centro di U a q ; il punto del cerchio V , ch'è diametralmente opposto all'origine; e siccome si ha $q = 2R - p$, è chiaro ch'esso dovrà tenersi come positivo, o come negativo, secondochè il centro di U cade al di dentro, o al di fuori di V .

Se si ponga $c+d=d'$, la relazione data può anche scriversi

$$ae_r^*v_r^* + e(v_r^* + v_r^*) + 2d'v_rv_r + f = 0 ;$$

e la condizione perchè l'inviluppo possa essere un cerchio diverrà

$$d'' = (e-a)'(e-f) .$$

26. Qualora nella relazione di cui si tratta fosse $e=0$, ed inoltre $af=d'$, i coefficienti dell'equazione dell'inviluppo si annullerebbero tutti; ma in tal caso la relazione riducendosi ad

$$ae_r^*v_r^* + 2d'v_rv_r + f = 0 ,$$

si vede che il suo primo membro è un quadrato perfetto, e quindi l'inviluppo si riduce al punto (n° 19) costruito dalla radice

$$ae_rv_r + d = 0 .$$

ARTICOLO IV.

I teoremi di Poncelet relativi alle coniche iscritte e circoscritte a' poligoni.

27. Essendo date due coniche V ed U , nella prima si supponga iscritto a piacere un poligono di un numero determinato di lati, i quali, ad eccezione di un solo, siano tutti tangenti dell'altra; qual'è l'inviluppo del lato libero?

Siano $V_0, V_1, V_2, \dots, V_n$ i vertici di un poligono di $n+1$ lati iscritto nella conica V , con n lati tangenti di U , e sia V_nV_0 il lato libero. Così per gli n contatti e per le convenute notazioni si avranno le n equazioni di condizione (n.° 1 e 20)

$$(29) \quad \downarrow(v_0, v_1) = 0, \quad \downarrow(v_1, v_2) = 0, \quad \dots, \quad \downarrow(v_{n-1}, v_n) = 0 ,$$

e le variabili estreme v_0 e v_n saranno legate dalla relazione (n° 2)

$$(30) \quad A_e v_0^* v_n^* + 2B_e(v_0 + v_n)v_0v_n + C_e(v_0 + v_n)^2 + 2D_e v_0v_n + 2E_e(v_n + v_0) + F_e = 0 ,$$

dove i coefficienti sono definiti dalle (4); ma quelle variabili indicano

gli elementi delle estremità del lato libero $V_0 V_n$; dunque l'involuppo di questo lato è una sezione conica (n° 22).

Chiamiamo T questa conica involuppo e supponendo

$$T = x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2z_x x + 2z_y y + \varphi_1 = 0,$$

passeremo ad esprimere i coefficienti di questa equazione in funzione di quelli delle equazioni delle coniche date V ed U . Osserviamo a tale effetto che, in virtù delle formole (27) e (26), applicate al caso attuale, si ha dapprima

$$\alpha_1 = l(A_1 C_n - B_1^2) - 2l(B_1 E_n - C_1 D_n) + (C_1 F_n - E_1^2),$$

$$\beta_1 = l(B_1 D_n - A_1 E_n) - (D_1 E_n - B_1 F_n),$$

$$\gamma_1 = A_1 F_n - D_1^2,$$

$$z_x = m[l(A_1 C_n - B_1^2) - (B_1 E_n - C_1 D_n)],$$

$$z_y = m(B_1 D_n - A_1 E_n),$$

$$\varphi_1 = m^2(A_1 C_n - B_1^2);$$

ma quindi, ricordando le formole (8), si avrà più semplicemente

$$\alpha_1 = P[A - 2l(D + \mu) + l^2 F], \quad z_x = Pm(lF - D - \mu),$$

$$\beta_1 = P(lE - B), \quad z_y = PmE,$$

$$\gamma_1 = P(C - 2\mu), \quad \varphi_1 = Pm^2 F,$$

Rimarrebbe ora a sostituire in luogo delle A, B , etc. i valori dati dalle (1), ed in fine alle a, b , etc. i loro valori definiti dalle (23); ma possiamo raggiungere lo stesso scopo di una maniera molto più semplice. Pei trovati valori di α_1, β_1 , etc. l'equazione dell' involuppo T , sopprimendo il fattore P , diviene

$$(3t) \quad T = \left\{ [A - 2l(D + \mu) + l^2 F] x^2 + 2(lE - B) xy + (C - 2\mu) y^2 + 2m(lF - D - \mu) x + 2mEy + m^2 F \right\} = 0,$$

e poscia, riunendo in uno i termini affetti dalla costante μ , avremo

$$T = \left\{ [A - 2lD + l^2 F] x^2 + 2(lE - B) xy + Cy^2 + 2m(lF - D) x + 2mEy + m^2 F - 2\mu[y^2 + lx^2 + mx] \right\} = 0.$$

Noi vediamo attualmente che l' ultimo termine equivale a $-2\mu V$; ed

inoltre, tenendo presenti i valori delle A, B , etc: dati dalle (1), vediamo che i coefficienti de' rimanenti sei termini in $x^2, xy, y^2, x, y, 1$, riproducono i secondi membri delle (27), di modo che il polinomio formato da quei sei termini equivale a $\Delta m^2 U$; e perciò l'equazione dell'inviluppo si trova da ultimo trasformata in

$$T = \Delta m^2 U - 2\lambda V = 0,$$

od ancora in

$$(32) \quad T = U - \frac{2\lambda}{\Delta m^2} V = 0,$$

essendo così espressa di una maniera semplicissima per mezzo delle sole coniche date U e V .

Ridotta a questa forma l'equazione dell'inviluppo, si palesano immediatamente alcune delle sue notabilissime proprietà. Così vedesi che la conica T passa pei quattro punti (reali o immaginari) comuni alle coniche date V ed U ; o quindi, riassumendo ciò che precede, possiamo enunciare il bel teorema di Poncelet:

Se tutti i lati di un poligono variabile inscritto in una conica siano, ad eccezione di un solo, tangenti di un'altra conica, il lato libero invilupperà una terza conica passante pe' punti comuni alle due coniche date; o, in altri termini, avente con esse le medesime secanti comuni (reali o ideali).

28. La stessa equazione dimostra che l'inviluppo T si ridurrebbe alla conica U qualora fosse $\mu = 0$, vale a dire quando fosse nullo il valore della costante corrispondente alle n equazioni (29); ma ciò poteva anche immediatamente dedursi dall'equazione (30), la quale, nella ipotesi di $\mu = 0$, si riduce ($n^\circ T$) a $\downarrow (v_0, v_n) = 0$, vale a dire ad

$$av_0^2 v_n^2 + 2b(v_0 + v_n)v_0 v_n + c(v_0 + v_n)^2 + 2dv_0 v_n + 2e(v_0 + v_n) + f = 0;$$

e quindi l'inviluppo non è che la stessa conica U . Adunque verificandosi la relazione $\mu = 0$, l'inviluppo si confonde con la conica U , e conseguentemente il lato libero sarà, al pari degli altri lati, sempre tangente alla conica medesima; o, in breve, il poligono risulterà sempre circoscritto a questa conica.

Reciprocamente, se accade che il poligono di $n+1$ lati inscritto nella conica V , con n lati tangenti di U , si trovi interamente circoscritto alla stessa U , la relazione $\mu = 0$ dev'essere necessariamente verificata, per-

chè con le equazioni (29) sussiste anche l'altra $\downarrow (v_0, v_n) = 0$. Ed essendo $\mu = 0$, la conica involuppo del lato libero dovrà confondersi con la conica U ; e siamo così condotti all'altro teorema:

Se un poligono sia iscritto in una conica e circoscritto ad un'altra, comunque radasi iscrivendo nella prima un altro poligono di ugual numero di lati tangenti, eccetto un solo, dell'altra conica, il rimanente lato sarà pur esso tangente di questa conica. In breve.

Una volta che un poligono si trova iscritto in una conica e circoscritto ad un'altra, una infinità di altri poligoni dello stesso numero di lati e con le medesime condizioni potranno essere situati tra le due coniche.

20. È ancora immediata conseguenza dell'equazione dell'involuppo nella forma (32) che, se le coniche V ed U sono cerchi entrambi, l'involuppo è anch'esso un cerchio. Ma si giunge a questa conclusione anche indipendentemente dalla detta equazione. In fatti nel caso attuale le equazioni di condizione pel contatto degli n lati del poligono col cerchio U divengono (n° 24)

$$\begin{aligned} av_1^2 + c(v_0 + v_1)^2 + 2dv_0v_1 + f &= 0, \\ av_2^2 + c(v_1 + v_2)^2 + 2dv_1v_2 + f &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ av_{n-1}^2 + c(v_{n-2} + v_{n-1})^2 + 2dv_{n-2}v_{n-1} + f &= 0, \end{aligned}$$

e l'eliminata può ridursi alla forma (n° 12)

$$(33) \quad av_1^2 + c_n(v_0 + v_1)^2 + 2d_nv_0v_1 + f = 0,$$

dove i coefficienti c_n , d_n sono legati dalla relazione

$$c(af - d_n^2 - 2c_nd_n) = c_n(af - d^2 - 2cd).$$

Ora, essendo cerchi le due coniche V ed U , si ha (n° 25)

$$af - d^2 = c(a + f + 2cd);$$

quindi la relazione precedente si riduce ad

$$af - d_n^2 = c_n(a + f + 2d_n);$$

e ne risulta che l'involuppo è anch'esso un cerchio. Così:

Se tutti i lati di un poligono variabile inscritto in un cerchio tocchino, eccetto un solo, un altro cerchio, il lato libero sarà continuamente tangente ad un terzo cerchio avente coi primi una stessa secante comune.

30. Si è già veduto (n° 6) che il primo membro dell'equazione (30) è un quadrato perfetto, se il valore della costante μ sia tale da soddisfare alla relazione

$$P = \begin{vmatrix} A & B & D + \mu \\ B & C - 2\mu & E \\ D + \mu & E & F \end{vmatrix} = 0.$$

Così in questa ipotesi quell'equazione è della forma

$$[A_1 v_a v_a + B_1 (v_a + v_a) + D] = 0,$$

e ne segue che l'inviluppo, cessando propriamente di essere una curva, si riduce al punto costruito dalla radice (n° 19)

$$A_1 v_a v_a + B_1 (v_a + v_a) + D_1 = 0.$$

31. Se le coniche V ed U sono cerchi entrambi, perchè l'inviluppo possa ridursi ad un punto, è necessario e basta che sia soddisfatta la condizione $c_s = 0$, perchè in questa ipotesi il primo membro della (33) diviene un quadrato perfetto (n° 13). Supposto per esempio $n = 2$ si ha (n° 15)

$$c_s = \frac{(c^2 - a)^2}{4cd^2};$$

ed è chiaro che sarà $c_s = 0$, quando sia $c^2 - a^2 = 0$. Adottando po' due cerchi gli elementi definiti nella nota al n° 24, questa relazione diviene

$$p^2 q^2 - r^2 (p^2 + q^2) = 0;$$

e, quando sia soddisfatta, il terzo lato di qualunque triangolo inscritto nel cerchio V , con due lati tangenti di U , passerà sempre per uno stesso punto.

32. Quando fosse $c_s = \infty$, l'equazione (33) non potrebbe essere altrimenti soddisfatta che supponendo $v_a + v_a = 0$, ed in tal caso l'inviluppo

si ridurrebbe ad una retta parallela all'asse delle ordinate (n° 19); vale a dire il lato libero del poligono si manterrebbe costantemente perpendicolare alla congiungente de' centri de' due cerchi. Per esempio, se $n=2$, si vede dalla formola precedente che sarà $c=\infty$ quando sia $o=c=0$, o $d'=0$. Siccome si ha $c=-r$, ed r indica il raggio del cerchio U , risulta che questa ipotesi non soddisfa alla quistione, o almeno si rapporta al caso assai particolare del detto cerchio ridotto ad un punto. Supponendo poi $d'=0$, poichè si ha $d'=pq$, è chiaro che si soddisfa a quest'altra ipotesi o ponendo $p=0$, o ponendo $q=0$. Nel primo caso il centro del cerchio U cadrebbe nell'origine delle coordinate, e ciò avviene se questo centro è un punto qualunque del cerchio V . Nel secondo caso lo stesso centro coinciderebbe col punto di V , diametralmente opposto all'origine, il che riproduce la medesima conclusione. E quindi:

Se il centro del cerchio U è un punto del cerchio V , iscrivendo in questo secondo cerchio un triangolo con due lati tangenti di U , il terzo lato sarà costantemente perpendicolare alla congiungente de' centri.

33. Allorchè un poligono si trova iscritto nella conica V e circoscritto alla conica U , in virtù di un teorema già dimostrato (n° 28) si può immaginare che questo poligono si trasformi successivamente in altri poligoni dello stesso numero di lati, movendosi tra le due coniche con legge di continuità, per modo da trovarsi sempre iscritto nell'una e circoscritto all'altra. Ora è evidente che in questo movimento la congiungente di due vertici qualunque di quel poligono invilupperà una sezione conica; ma esiste un caso notabilissimo in cui questo involuppo si riduce ad un punto. Supponiamo che il numero de'lati del poligono sia pari ed uguale a $2r$; così, essendo $V_0, V_1, \dots, V_r, \dots, V_{2r-1}$, i vertici di questo poligono, sussisteranno le $2r$ equazioni

$$4(v_0, v_1)=0, \quad 4(v_1, v_2)=0, \quad \dots, \quad 4(v_{r-1}, v_r)=0, \quad \dots, \quad 4(v_{2r-1}, v_0)=0.$$

Posto ciò, se si considera una diagonale del poligono (ed ora intendiamo per diagonale la congiungente di due vertici opposti), e sia per esempio quella che congiunge i due vertici V_0 e V_r , l'inviluppo di questa diagonale sarà la conica definita dalla eliminata in v_0 e v_r , corrispondente alle prime, o alle ultime r equazioni di quelle scritte qui sopra. Ma questa eliminata è un quadrato perfetto (n° 8); dunque l'inviluppo della

diagonale si riduce ad un punto; e siamo così condotti al bel teorema segnalato dal Poncelet.

Se due coniche consentono tra loro poligoni in numero pari di lati, iscritti nell'una e circoscritti all'altra, le diagonali di questi poligoni si tagliano tutte in un medesimo punto fisso.

34. Affinchè l'involuppo del lato libero di un poligono di un numero assegnato di lati possa essere rappresentata dall'equazione

$$T = U - \frac{2\mu}{\Delta m^2} V = 0,$$

è d'uopo che la costante μ riceva una conveniente determinazione. Ma se questa costante si riguarda come arbitraria, l'equazione precedente esprimerà una conica qualunque avente le stesse secanti comuni con le due coniche V ed U . Sia in questa ipotesi μ , un valore qualunque di μ , e dinotata con T , la conica corrispondente all'equazione

$$T_\mu = U - \frac{2\mu}{\Delta m^2} V = 0,$$

supponiamo iscritta nella conica V una corda qualunque $V_r V_s$ tangente di T_μ . Così se pongasi (n° 10)

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= F(C - 2\mu_s) - E^2, & D^{(1)} &= BE - (C - 2\mu_s)(D + \mu_s), \\ B^{(1)} &= E(D + \mu_s) - BF, & E^{(1)} &= B(D + \mu_s) - AE, \\ C^{(1)} &= AF - (D + \mu_s)^2, & F^{(1)} &= A(C - 2\mu_s) - B^2, \end{aligned}$$

ed inoltre

$$\mathfrak{A}^{(1)}(v_r, v_s) =$$

$$A^{(1)}v_r v_s + 2B^{(1)}(v_r + v_s)v_r v_s + C^{(1)}(v_r + v_s)^2 + 2D^{(1)}v_r v_s + 2E^{(1)}(v_r + v_s) + F^{(1)},$$

la condizione pel contatto tra la corda $V_r V_s$ e la conica T_μ sarà espressa dall'equazione

$$\mathfrak{A}^{(1)}(v_r, v_s) = 0.$$

Ciò premesso, considerando una serie di n coniche $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$, corrispondenti ad altrettanti valori distinti della costante arbitraria, μ , $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, supporremo iscritto nella conica V un poligono di $n+1$

lati $V_0 V_1, V_1 V_2, \dots, V_{n-1} V_n$, i quali, ad eccezione del lato $V_0 V_1$, siano uno ad uno rispettivamente tangenti di quelle coniche, e cercheremo l'involuppo del lato libero $V_0 V_1$. In questo caso po' contatti di tutti gli altri n lati con la conica corrispondenti avremo le n equazioni di condizione

$$\mathcal{U}(v_0, v_1) = 0, \quad \mathcal{U}'(v_1, v_2) = 0, \quad \dots, \quad \mathcal{U}^{(n-1)}(v_{n-1}, v_n) = 0,$$

e le variabili estreme v_0 o v_n saranno legate da una relazione della forma (n° 10)

$$A_0 v_0^2 + 2B_0 v_0 + C_0 + 2D_0 v_0 v_1 + 2E_0(v_0 + v_1) + F_0 = 0;$$

ma quelle variabili indicano gli elementi delle estremità del lato libero del poligono, $V_0 V_1$; dunque l'involuppo di questo lato è una sezione conica (n° 22) passante pe' punti comuni a tutte le altre, poichè sarebbe definita dall'equazione

$$U - \frac{2\mu}{\Delta m^2} V = 0,$$

a patto che la costante μ vi riceva una conveniente determinazione. E siamo così condotti al teorema generale:

Essendo dato un numero qualunque di coniche aventi le stesse secanti comuni, ed essendo iscritto in una di esse un poligono di cui ciascun lato, ad eccezione di un solo, sia tangente ad una delle coniche, l'involuppo del lato libero sarà un'altra conica avente le stesse secanti comuni con le prime.

ARTICOLO V

Ricerca della relazione tra gli elementi di due coniche l'una iscritta, l'altra circoscritta ad un poligono. Esame compiuto di questa questione pel caso di due cerchi.

35. Supponendo che un poligono di n lati si trovi iscritto nella conica V e circoscritto alla conica U , denotati come al solito con $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ gli elementi de' vertici del poligono, dovranno sussistere le n equazioni

$$\mathcal{U}(v_0, v_1) = 0, \quad \mathcal{U}'(v_1, v_2) = 0, \quad \dots, \quad \mathcal{U}^{(n-1)}(v_{n-1}, v_0) = 0, \quad \mathcal{U}(v_{n-1}, v_0) = 0;$$

e quindi, indicando con μ_{n-1} il valore della costante μ corrispondente alle prime $n-1$ equazioni, sarà soddisfatta la condizione (n° 7)

$$\mu_{n-1} = 0;$$

la quale adunque esprime di una maniera generale la relazione, che for-

ma il soggetto della presente ricerca. Così, per esempio, se si tratta del triangolo, pel quale si ha il sistema delle tre equazioni

$$4(v_0, v_1) = 0 \quad , \quad 4(v_1, v_2) = 0 \quad , \quad 4(v_2, v_0) = 0 \quad ,$$

avendosi per questo caso (n° 4)

$$\mu_s = c^2 + 2cd + af - 4be \quad .$$

la relazione richiesta sarà

$$(34) \quad c^2 + 2cd + af - 4be = 0 \quad .$$

Volendo esprimere questa relazione in funzione de' parametri delle equazioni delle due coniche V ed U , basterà sostituire alle a , b , etc. i valori (23), e si ottieno in tal guisa

$$\left. \begin{aligned} & (x\gamma - \delta^2)^2 - 2(x\gamma - \delta^2)[l(\gamma\gamma - \epsilon^2) + m(\beta\delta - \gamma^2)] \\ & + (\gamma\gamma - \epsilon^2)[l^2(\gamma\gamma - \epsilon^2) + 2lm(\beta\delta - \gamma^2) + m^2(x\gamma - \beta^2)] \\ & - 4(\beta\gamma - \delta\epsilon)[l(\delta\delta - \beta\gamma) + m(\beta\delta - x\gamma)] \end{aligned} \right\} = 0 \quad ;$$

formola da noi già data fin dal 1841.

Osserveremo intanto che la relazione, di cui trattasi, si può ottenere indipendentemente dalla costante, dappoichè essa deve riprodursi nel risultamento della eliminazione di tutte le n variabili (n° 7) dal sistema delle n equazioni. Ma vedremo che questa ricerca può farsi dipendere da un numero di equazioni assai minore; e perciò distingueremo due casi, secondochè n è impari, o pari.

Caso 1°; n impari.

36. In questa ipotesi, supponendo $n = 2s + 1$, si hanno le $2s + 1$ equazioni

$$\begin{aligned} 4(v_0, v_1) &= 0 & , & & 4(v_1, v_2) &= 0 & , & & 4(v_{2s-1}, v_{2s}) &= 0 \\ 4(v_1, v_2) &= 0 & & & & & & & 4(v_{2s}, v_{2s+1}) &= 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 4(v_{2s-1}, v_{2s}) &= 0 & & & & & & & 4(v_{2s}, v_{2s+1}) &= 0 \end{aligned}$$

Ora immaginando l'eliminata in v_0 e v_{2s} , corrispondente alle prime s equa-

zioni, e quella in v_{s+1} e v_s , che corrisponde alle ultime s equazioni, queste due eliminate possono rispettivamente rappresentarsi con

$$A_s v_s^2 + 2B_s (v_0 + v_s) v_0 v_s + C_s (v_0 + v_s)^2 + 2D_s v_0 v_s + 2E_s (v_0 + v_s) + F_s = 0, \\ A_s v_s^2 + 2B_s (v_0 + v_{s-1}) v_0 v_{s-1} + C_s (v_0 + v_{s-1})^2 + 2D_s v_0 v_{s-1} + 2E_s (v_0 + v_{s-1}) + F = 0;$$

ma siccome è lecito di dare un valore qualunque ad una delle variabili ($n^\circ 7$), porremo $v_0 = \infty$ (*), e le due equazioni diverranno

$$A_s v_s^2 + 2B_s v_s + C_s = 0, \quad A_s v_{s-1}^2 + 2B_s v_{s-1} + C_s = 0.$$

Segue da queste due equazioni che debbono sussistere le due relazioni

$$v_s v_{s-1} = \frac{C_s}{A_s}, \quad v_s + v_{s-1} = -\frac{2B_s}{A_s};$$

e quindi otterremo la risultante di tutte le n equazioni sostituendo siffatti valori nell'equazione di mezzo (v_s, v_{s-1}) = 0, cioè nell'equazione

$$ac^2 v_{s-1}^2 + 2b(v_s + v_{s-1}) v_s v_{s-1} + c(v_s + v_{s-1})^2 + 2d v_s v_{s-1} + 2e(v_s + v_{s-1}) + f = 0;$$

di modo che pel poligono di $n=2s+1$ lati si ha infine la relazione

$$(35) \quad aC_s^2 - 4bB_s C_s + 4cB_s^2 + 2dA_s C_s - 4eA_s B_s + fA_s^2 = 0.$$

Questa formola porge le relazioni pel triangolo, pentagono, ettagono, ec. ponendovi rispettivamente $s=1, 2, 3$, ec. E siccome per $s=1$ le A, B , ec. equivalgono alle a, b , etc., così la relazione pel triangolo sarebbe

$$ac^2 + 2acd + a^2 f - 4abc = 0;$$

ma sopprimendone il fattore a , si ritorna alla formola (34) trovata per altra via.

37. Egli è importante di osservare che la relazione per un poligono di un ordine qualunque, ottenuta col metodo esposto, ha necessaria-

(*) Questa supposizione di $v_s = \infty$ equivale a far coincidere il vertice V_s del poligono con l'origine delle coordinate, il quale è un punto della conica V ($n^\circ 18$). Avrebbe ancora potuto supponersi $v_s = 0$; e ciò sarebbe stato lo stesso che far coincidere il vertice V_s con quel punto della conica V , il quale è diametralmente opposto all'origine.

mente per fattore quella che si avrebbe pel poligono di un ordine inferiore per due unità. Noi dichiareremo questo fatto considerando per ragione di chiarezza un caso particolare; e supporremo, per esempio, che si tratti della relazione pel pentagono, definita dalle cinque equazioni

$$\downarrow(v_0, v_1) = 0, \quad \downarrow(v_1, v_2) = 0, \quad \downarrow(v_2, v_3) = 0, \quad \downarrow(v_3, v_4) = 0, \quad \downarrow(v_4, v_0) = 0,$$

e che risulta dalla (35) ponendovi $s=2$; di tal che questa relazione sarà

$$(36) \quad \alpha C^2 - 4bB_1C_1 + 4cB_2^2 + 2dA_1C_1 - 4eA_1B_1 + fA_1^2 = 0,$$

i valori di A_1, B_1, C_1 , ec. essendo dati dalle (7). Ciò premesso, alle due ultime delle cinque equazioni (e così in generale) sostituiranno due altre equazioni, nelle quali l'indice della variabile comune sia diminuito di due unità; e quindi otterremo il nuovo sistema di cinque equazioni

$$\downarrow(v_0, v_1) = 0, \quad \downarrow(v_1, v_2) = 0, \quad \downarrow(v_2, v_3) = 0, \quad \downarrow(v_3, v_4) = 0, \quad \downarrow(v_4, v_0) = 0,$$

nel quale, in conseguenza della modifica operata, la penultima equazione risulta necessariamente identica all' antipenultima. Intanto, sia che si elimini dallo due ultime equazioni del primo sistema la variabile comune v_1 , sia che si elimini v_1 dalle due ultime equazioni del nuovo sistema, è chiaro che il risultamento sarà sempre lo stesso; e quindi non essendosi operata alcuna modifica nelle altre equazioni, ne segue che la relazione (36), la quale si deduce dal primo sistema di equazioni col metodo sviluppato nel numero precedente, con lo stesso metodo potrebbe ancora dedursi dal nuovo sistema. Ma d'altra parte osserveremo che, se nel nuovo sistema si sopprimano la penultima e l'ultima equazione, che sono identiche, le equazioni rimanenti

$$\downarrow(v_0, v_1) = 0, \quad \downarrow(v_1, v_2) = 0, \quad \downarrow(v_2, v_3) = 0,$$

sono quelle precisamente che definiscono la relazione pel triangolo, espressa dalla formola (34), la quale perciò è necessariamente compresa come fattore in quella che si otterrebbe impiegando tutte le cinque equazioni, vale a dire in quella che si ottiene pel caso del pentagono.

Del rimanente questa conclusione può essere agevolmente verificata a riguardo dell'esempio sul quale abbiain ragionato; non già per mezzo della divisione effettiva, il che obbligherebbe a calcoli molto lunghi, ma

dimostrando che la relazione pel pentagono, espressa dalla formola (36), è necessariamente soddisfatta supponendo

$$c^* + 2cd + af - 4be = 0 .$$

In fatti questa relazione si può mettere sotto le altre due forme

$$c^* + af - 2be = 2(be - cd) \quad , \quad 4be - (c + d)^* = af - d^* ,$$

e quindi le espressioni di A_* , B_* , ec. date dallo (7) diverranno

$$\begin{aligned} A_* &= (ac - b^*)(af - d^*) - (bd - ac)^* \\ B_* &= (bd - ac)(be - cd) - (ac - b^*)(de - bf) \\ C_* &= (ac - b^*)(cf - e^*) - (be - cd)^* \\ D_* &= (bd - ac)(de - bf) - (af - d^*)(be - cd) \\ E_* &= (de - bf)(be - cd) - (bd - ac)(cf - e^*) \\ F_* &= (cf - e^*)(af - d^*) - (de - bf)^* ; \end{aligned}$$

ma in virtù delle (1), e delle (9) si avrà più semplicemente

$$\begin{aligned} A_* &= CF - E^* = Ra \quad , \quad D_* = BE - CD = Rd \quad , \\ B_* &= DE - BF = Rb \quad , \quad E_* = BD - AE = Re \quad , \\ C_* &= AF - D^* = Rc \quad , \quad F_* = AC - B^* = Rf . \end{aligned}$$

Sostituendo questi valori nella formola (36), la medesima si riduce ad

$$a(c^* + 2cd + af - 4be) = 0 ;$$

vale a dire a $0=0$, perchè è nullo per ipotesi il secondo fattore del 1° membro; e ciò dimostra che la relazione pel pentagono ha effettivamente per fattore quella che corrisponde al caso del triangolo.

Caso 2°; n numero pari.

38. Supposto $n=2s$, la relazione pel poligono di $2s$ lati sarà definita dal sistema di $2s$ equazioni

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(v_0, v_1) &= 0 \quad , \quad \frac{1}{2}(v_s, v_{s+1}) = 0 \quad , \\ \frac{1}{2}(v_1, v_2) &= 0 \quad , \quad \frac{1}{2}(v_{s+1}, v_{s+2}) = 0 \quad , \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \\ \frac{1}{2}(v_{s-1}, v_s) &= 0 \quad , \quad \frac{1}{2}(v_{s-1}, v_s) = 0 \quad ; \end{aligned}$$

e siccome la loro coesistenza importa che l'eliminata in v_0 o v_s corri-

spondente o alle prime o alle ultime s equazioni debba essere un quadrato perfetto ($n^{\circ} 8$), così indicando con μ , il valore della costante conveniente a queste s equazioni, sarà soddisfatta la condizione

$$(37) \quad P = \begin{vmatrix} A & B & D + \mu_s \\ B & C - 2\mu_s & E \\ D + \mu_s & E & F \end{vmatrix} = 0 ;$$

o sott'altra forma

$$(38) \quad [R - (c - d)\mu_s]^2 - (c^2 + 2cd + af - 4be - 2\mu_s)\mu_s = 0 .$$

Questa condizione adunque esprime nel modo il più generale la relazione pel poligono di $2s$ lati; e ponendovi $s=2, 3, 4$, etc. ne risulta rispettivamente quella pel quadrilatero, esagono, ottagono, ec. Per esempio, supponendo $s=2$, si ha ($n^{\circ} 4$)

$$2\mu_s = c^2 + 2cd + af - 4be ;$$

e quindi la relazione pel quadrilatero sarà semplicemente

$$2R - (c - d)(c^2 + 2cd + af - 4be) = 0 ;$$

ma essendo

$$R = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = acf + 2bed - ae^2 - cd^2 - fb^2 ,$$

la relazione di cui trattasi si riduce a

$$(39) \quad (c^2 - af)(c + d) + 2(ae^2 + fb^2 - 2bec) = 0 .$$

Si può ritrovare questa relazione pel quadrilatero indipendentemente dalla formola (37) o (38), considerando immediatamente le quattro equazioni

$$\downarrow(e_0, v_1) = 0 , \downarrow(v_1, v_2) = 0 , \downarrow(v_2, v_3) = 0 , \downarrow(v_3, v_0) = 0 .$$

Se si ordinano le due prime equazioni l'una rispetto a v_0 , l'altra rispetto a v_1 , si farà palese che, qualunque valore voglia supporre alla variabile

comune v_1 , le due radici di ciascuna saranno v_0 e v_1 , sicchè ne risultano le due relazioni

$$v_0 + v_1 = -2 \frac{bc_1^2 + d'v_1 + e}{av_1^2 + 2bv_1 + c} \quad , \quad v_0 v_1 = \frac{cv_1^2 + 2ev_1 + f}{av_1^2 + 2bv_1 + c} ;$$

e nella stessa maniera dalle ultime due equazioni avremo

$$v_0 + v_1 = -2 \frac{bc_1^2 + d'v_1 + e}{av_1^2 + 2bv_1 + c} \quad , \quad v_0 v_1 = \frac{cv_1^2 + 2ev_1 + f}{av_1^2 + 2bv_1 + c} .$$

Quindi, se si uguagliano tra loro le due espressioni di $v_0 + v_1$, e quelle di $v_0 v_1$, si ottengono due equazioni in ciascuna delle quali più non figurano che le sole variabili v_0 e v_1 ; ma liberandole da fratti si vedrà che ciascuna è affetta dal fattore $v_1 - v_1$, ch'è lecito di sopprimere; e le due equazioni diverranno

$$(ad' - 2b^2)v_1 v_1 + (ae - bc)(v_1 + v_1) + (2be - cd') = 0 ,$$

$$2(ae - bc)v_1 v_1 + (af - c^2)(v_1 + v_1) + 2(bf - ce) = 0 .$$

Ora queste due equazioni debbono dar luogo alle due relazioni

$$\frac{ae - bc}{ad' - 2b^2} = \frac{af - c^2}{2(ae - bc)} \quad , \quad \frac{2be - cd'}{ad' - 2b^2} = \frac{bf - ce}{ae - bc} ;$$

ma facendone sparire i fratti, e sopprimendo nella prima il fattore a , e nella seconda il fattore b , si trova che l'una e l'altra riproducono la stessa relazione (39) ottenuta da principii diversi.

39. Nelle quistioni, di cui ci occupiamo, è un fatto meritevole di attenzione che dalla relazione pel poligono di s lati si può passare a quella, che si rapporta al poligono di un numero di lati, che sia multiplo k volte di s , moltiplicando per k l'indice di ciascuna delle lettere che vi figura: In fatti questa seconda relazione sarebbe definita dalle ks equazioni

$$ar_1^k r_2^k + \dots = 0 \quad , \quad ar_1^k r_3^k + \dots = 0 \quad , \quad \dots \quad , \quad ar_{k-1}^k r_s^k + \dots = 0 ;$$

ma siccome ad ogni gruppo di s successive equazioni si può sostituire una sola equazione, è manifesto che in tal modo questo sistema di ks equazioni si troverebbe rimpiazzato dal sistema di k equazioni

$$A_1 r_1^k r_2^k + \dots = 0 \quad , \quad A_2 r_1^k r_3^k + \dots = 0 \quad , \quad \dots \quad , \quad A_s r_{k-1}^k r_s^k + \dots = 0 ;$$

e quindi la relazione pel poligono di ks lati sarà formata per mezzo delle $A_1, A_2, \dots$ ec. nella stessa maniera con cui la relazione pel poligono di s

lati è composta per mezzo delle a, b , ec. o di funzioni di queste ultime quantità, il che torna alla regola degl'indici poc' anzi enunciata. Segue in particolare da questa regola che, qualora sia conosciuta la relazione pel poligono di un certo numero di lati, dee tenersi come conosciuta anche quella pel poligono di un numero doppio di lati (n^o 5). Quindi è, per esempio, che la relazione pel triangolo, data dalla formola (34), porge immediatamente quelle pe' poligoni di 6, 12, 24 lati, ec. le quali adunque sono rispettivamente espresse da

$$C_1^2 + 2C_2D_1 + A_1F_1 - 4B_1E_1 = 0,$$

$$C_2^2 + 2C_3D_2 + A_2F_2 - 4B_2E_2 = 0,$$

$$\text{ec:} \qquad \qquad \text{ec:} \qquad \qquad \text{ec:}$$

Nella stessa maniera dalla relazione pel quadrilatero, che si ha nella formola (39), possiamo subito ottenere quelle pe' poligoni di 8, 16, 32 lati, ec.; e dalla formola (36), esprimente la relazione pel pentagono, si avrebbero quelle pe' poligoni di 10, 20, 40 lati, ec. Noi crediamo di poterci arrestare a queste indicazioni in riguardo al caso generale di due sezioni coniche; e passeremo invece ad occuparci del caso di due cerchi, di cui daremo uno sviluppo più compiuto, e che dipende dalle equazioni più semplici considerate nell'articolo 2°; osservando tuttavia che in questo secondo caso è implicitamente compreso il primo, essendosi già notato che le equazioni complete, considerate nell'articolo 1°, sono suscettibili di essere trasformate nelle equazioni incomplete considerate nel 2°.

Esame della quistione pel caso di due cerchi.

40. Quando un poligono di n lati è iseritto nel cerchio V e circoscritto al cerchio U , il sistema delle n equazioni si può ridurre al sistema più semplice

$$ac^2v_i + c(v_o + v_i)^2 + 2dv_o v_i + f = 0,$$

$$ac^2v_i + c(v_i + v_o)^2 + 2dv_i v_o + f = 0,$$

$$ac^2v_i + c(v_i + v_{i+1})^2 + 2dv_i v_{i+1} + f = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$ac^2v_{n-2}v_{n-1} + c(v_{n-2} + v_{n-1})^2 + \text{ec. ec.} = 0,$$

$$ac^2v_{n-1}v_o^2 + c(v_{n-1} + v_o)^2 + \text{ec. ec.} = 0,$$

dove si ha (nota al n° 24)

$$(40) \quad a = p^2 - r^2, \quad c = -r^2, \quad d = r^2 + pq, \quad f = q^2 - r^2,$$

le equazioni de' due cerchi essendo

$$V = y^2 + x^2 - 2Rx = y^2 + x^2 - (p+q)x = 0,$$

$$U = y^2 + (x-p)^2 - r^2 = y^2 + x^2 - 2px + p^2 - r^2 = 0.$$

Intanto, dovendo le prime $n-1$ equazioni coesistere con l'ultima, cioè importa che debba essere soddisfatta la condizione (n° 13, II)

$$(41) \quad c_{n-1} = c;$$

la quale adunque esprime nel modo il più generale la relazione, che deve verificarsi tra gli elementi de' due cerchi, affinchè un poligono di n lati possa essere iscritto nell'uno e circoscritto all'altro.

Ma appunto per la sua generalità non è questa la formola più semplice, che possa risolvere la nostra quistione; essendo necessariamente affetta da fattori, cui non interessa di considerare. Per esempio, secondo questa formola la relazione pel triangolo sarebbe dapprima

$$c_3 = c;$$

ma quindi, per la espressione di c , data al n° 15, diverrà

$$(c^2 - af)^2 = 4c^2(c + d)^2;$$

ed estraendo la radice da' due membri avremo

$$c^2 - af = \pm 2c(c + d)^2.$$

Ecco adunque una prima sorgente di equivoco in un doppio segno, pel quale siamo condotti a due relazioni

$$c^2 + 2cd + af = 0,$$

$$3c^2 + 2cd - af = 0.$$

Tuttavolta, senza impegnarci in altra discussione, ci limitiamo ad osservare che la quistione è risolta dalla prima di queste due relazioni, sia perchè la ritroveremo ora direttamente per altra via, e sia ancora perchè la formola (34), data pel triangolo nel caso generale di due sezioni

coniche, si riduce appunto alla prima delle due relazioni per le ipotesi di $b=0$ ed $e=0$, in virtù delle quali tutte le relazioni ottenute pel caso di due coniche divengono applicabili al caso di due cerchi. Nè ciò è tutto, dappoichè sostituendo in quella prima relazione ad a, c, d, f i valori (40), la medesima si riduce a

$$p^2 q^2 = r^2 (p + q)^2 ;$$

e ne risulta ancora una doppia formola

$$pq = r(p + q) ,$$

$$pq = -r(p + q) .$$

Ma ora ogni equivoco può esser tolto dalla osservazione fatta nella nota al n° 24 intorno al segno di q ; e quindi possiamo riconoscere che le due formole esprimono entrambe la relazione, qual dev'essere, pel caso del triangolo iscritto nel cerchio V e circoscritto al cerchio U ; però la prima ha luogo se il centro di U è interiore al cerchio V , e la seconda ha luogo nel caso opposto.

Tralasciando adunque ogni altra considerazione intorno alla formola (41), passeremo ad esporre un altro metodo, che conduce a relazioni più semplici, distinguendo a tale effetto i due casi di n pari ed n dispari.

Caso 1°; n impari.

41. Noi supporremo $n=2s+1$; ed imitando esattamente il metodo seguito per due coniche nel n° 36, otterremo la relazione che si cerca, espressa dalla formola

$$c_s^2 + 2dc_s + ef = 0 ,$$

la quale adunque può daro la relazione pel triangolo, pentagono, ettagono, ecc. secondochè si ponga $s=1, 2, 3$, ecc. Ed in particolare, facendo $s=1$, si riproduce la relazione trovata poc'anzi pel caso del triangolo.

Ma la formola, che precede, è suscettibile di una forma assai più propria, che mena direttamente alla più semplice risoluzione della questione. In fatti, risolvendo l'equazione rispetto a c_s , risulta

$$c_s = -d \pm \sqrt{d^2 - ef} ;$$

ma pe' valori di a, d, f , dati nelle (40), si ha

$$d^2 - af = r^2(p+q)^2;$$

perciò avremo invece

$$c_s = \pm r(p+q) - (r^2 + pq);$$

e siccome il segno superiore corrisponde al caso in cui il centro del cerchio U è interno al cerchio V , e l'inferiore al caso opposto; così, ritenuta per semplicità la prima ipotesi, potremo scrivere

$$c_s = r(p+q) - pq - r^2,$$

ed ancora

$$c_s = -(p-r)(q-r);$$

ed è questa da ultimo la formola più propria ad esprimere in generale la relazione pel poligono di $2s+1$ lati iscritto nel cerchio V , e circoscritto ad U . Ma bisogna tener presente che questa formola ha necessariamente per fattore quella, che corrisponde al poligono di un ordine inferiore per due unità, talchè la vera relazione pel poligono di $2s+1$ lati, libera da ogni fattore, ed eccetto il caso di $s=1$, ch'è quello del triangolo, sarà

$$\frac{c_s + (p-r)(q-r)}{c_{s-1} + (p-r)(q-r)} = 0.$$

42. Applicheremo ora le formole che precedono ad alcuni esempi.

Triangolo.

$$c = r(p+q) - pq - r^2;$$

ed essendo $c = -r^2$, si ha immediatamente

$$r(p+q) - pq = 0.$$

Pentagono.

$$c_s = r(p+q) - pq - r^2;$$

ma si ha

$$c_s = \frac{(c^2 - af)^2}{4c(c+d)^2} = - \left[\frac{r^2(p+q)^2 - p^2q^2 - 2r^2pq}{2rpq} \right]^2 = - \left[\frac{r^2(p+q)^2 - p^2q^2}{2rpq} - r \right]^2;$$

così, sviluppando il quadrato, e liberando da' fratti, si ottiene

$$[r^2(p+q)^2 - p^2q^2]^2 - 4r^2pq[r^2(p+q)^2 - p^2q^2] + 4r^4p^2q^2[r(p+q) - pq] = 0.$$

Sarebbe questa adunque la relazione pel pentagono; ma essa dev'essere

com'è di fatto, divisibile per $r(p+q)-pq$; e quindi la vera relazione sarà

$$[r(p+q)+pq]^2[r(p+q)-pq]-4r^2pq[r(p+q)+pq]+4r^3p^2q^2=0,$$

od ancora

$$[r^2 \cdot p + q^2 - p^2 q^2][r(p+q)+pq]-4r^2pq(p+q)=0.$$

Ordinando questa formola rispetto ad r , si vedrà coincidere esattamente con quella data dal Fuss (*).

Ettagono.

$$e_3 + (p-r)(q-r).$$

Dal n° 16 si ha

$$c_3 = e \frac{[c^2 - af^2 - 4af(c+d)]^2}{[c^2 - af^2 - 4c^2(c+d)]^2} = -r^2 \frac{[(r^2(p^2+q^2)-p^2q^2)^2 - 4p^2q^2(p^2-r^2)(q^2-r^2)]^2}{[r^2(p+q)-p^2q^2-4r^2p^2q^2]^2};$$

laonde sostituendo e liberando da' fratti verrà

$$\begin{aligned} & r^2[(r^2(p^2+q^2)-p^2q^2)^2 - 4p^2q^2(p^2-r^2)(q^2-r^2)]^2 \\ & = (p-r)(q-r)[(r^2(p^2+q^2)-p^2q^2)^2 - 4r^2p^2q^2]^2. \end{aligned}$$

Questa formola dev'essere divisibile per quella che esprime la relazione

(*) La relazione pel pentagono è adunque una formola omogenea di 6° grado in p, q, r , alla quale tuttavia non si giunge che per mezzo di una formola di 8° grado, sopprimendone un fattore di 2° grado; ma questo difetto, ch'è nella natura de' processi algebrici, è compensato dalla certezza della esistenza del fattore, che possiamo conoscere *a priori* e sopprimere, senza che vi sia luogo a discussioni ed incertezze.

Dene altrimenti va la cosa in riguardo alla ricerca di Fuss, il quale perviene, non già alla formola di 6° grado, sibbene ad un'altra di 9° grado; in cui ravvisa, è vero, prima un fattore $p+q$, estranolo alla questione, e poscia l'altro $r(p+q)-pq$; ma questi successi particolari non hanno interesse per la questione, poichè si tratta di fattori casualmente riconosciuti, a la cui esistenza non è guidata da norme sicure, come lo prova la seguente nota pel caso dell'ettagono.

Ma un fatto più importante si è che queste osservazioni sussistono anche per la formole che si ottengono applicando all'attuale questione la teorica delle funzioni ellittiche, come fece pel primo l'illustre Jacobi. Trattando, per esempio, il caso del pentagono si perviene alla relazione (V. *Dürge, Theorie der elliptischen Functionen*)

$$pr\sqrt{p+q} = pr\sqrt{q-r} + q(p+r)\sqrt{p-r},$$

e, facendola sparire i radicali, si ha una formola omogenea di 10° grado in p, q, r , la quale dunque è ingombra da un fattore anche più complesso di quello che si trova nel risultamento di Fuss. E di fatti, oltre al fattore di 2° grado $r(p+q)-pq$, è facile attualmente di scovirne anche un altro dallo stesso grado $(p+r)^2$; e, sopprimendoli entrambi, si ritorna alla formola di 6° grado data nel testo. Rammenteremo tuttavolta che li chiara: *Nichelot*, spingendo più oltre le ricerche di *Jacobi*, ha cercato di ovviare agli inconvenienti qui messi in rilievo. (*Crelle*, vol. 38).

pel pentagono; e di fatto ordinando l'una e l'altra rispetto ad r , ed eseguendo la divisione, si ha la relazione per l'ettagono, sgombra di ogni fattore,

$$\left\{ \begin{aligned} (p+q)^4(p-q)^4r^6 - 2pq(p-q)(p^4-q^4)r^4 - p^4q^4(p^4-q^4)r^4 \\ + 4p^4q^4(p+q)(p^4+q^4-pq)r^4 - p^4q^4(p+q)^4r^2 - 2p^4q^4(p+q)r + p^4q^4 \end{aligned} \right\} = 0. (*)$$

(*) Tre geometri, Fuss, Mention, e Richelot, pare che si siano provati a sviluppare la relazione per l'ettagono, che si riguarda come una di casi meno semplici tra' poligoni degli ordini più bassi, allorché il numero de' lati è un numero primo, e non è senza interesse di porre a confronto i loro risulamenti con quelli da noi ottenuti. Ecco la relazione data da Fuss:

$$\begin{aligned} 2pq[r(p-q) - pq + 2r^2] \sqrt{(p-r)(p+q)} + 2r[r^2(p^2+q^2) - p^2q^2] \sqrt{(q-r)(p+q)} \\ = \pm [r(p-q) - pq] [r^2(p^2+q^2) + p^2q^2]. \end{aligned}$$

In quanto a quelle data da Mention, il quale adopera elementi diversi, converrà porre

$$pq = r^2 i, \quad r^2(p^2+q^2) - p^2q^2 - r^4 = r^2 \gamma,$$

e con questi elementi la relazione, cui perviene, è la seguente

$$\left\{ \begin{aligned} 64 \gamma^2 + 32 \gamma(1-\gamma)^2 - 16 \gamma(1+\gamma)^2 i^2 + 8(1+\gamma)^2(1-3\gamma)^2 + 4(1+\gamma)^2 i^2 \\ - 4(1+\gamma)^2 i - (1+\gamma)^2 \end{aligned} \right\} = 0.$$

E da ultimo se si ponga $p+q=2R$; $p-q=s$, la formola del Richelot diviene

$$\left\{ \begin{aligned} [r^4(p^2-q^2) - p^2q^2][r^2(p+q)^2 - p^2q^2] \\ - 2r^2(p+q)[r^2(p^2+q^2) - p^2q^2][r^2(p-q)^2 - p^2q^2] \end{aligned} \right\} = 0.$$

Così abbiamo quattro forme diverse per la relazione ettagonale; ma pure, se tutte sono esatte, rese razionali, ed espresse ne' medesimi elementi, è necessità che convengano tra loro. Intanto, se si fanno sparire i radicali da quella di Fuss, si ha una formola di 12° grado rispetto ad r , mentre la nostra è di 6° grado; ed esprimendo quella di Mention in p, q, r , si ha pure una formola di 12° grado in r , diversa da quella di Fuss. Segue da questo raffronto che, se la nostra formola è esatta, quelle di Fuss e di Mention debbono essere affette da fattori estranei. Ora è facile di dilleguare ogni dubbio, facendo corrispondere le formole che consideriamo, al caso de' cerchi concentrici, dovendo riprodursi in tal guisa risulamenti già conosciuti sulle teoriche delle sezioni angolari. Supposto, per maggiore semplicità, uguale ad uno il raggio del cerchio V , nel caso de' cerchi concentrici sarà $p=q=1$. Per queste ipotesi la nostra formola porge all'istante

$$8r^3 - 4r^2 - 4r + 1 = 0,$$

conosciuta equazione di 3° grado, ciascuna radice della quale esprime l'apotema di un ettagono regolare inscrittibile nel cerchio di raggio 1; e si sa che tre sono le soluzioni.

Enneagono.

$$c, + (p-r)(q-r) .$$

Dalla formola (22) si ha dapprima

$$c, = \frac{[c^2 - af]^2 - 16afe(c+d,)^2}{16c(c+d,)^2(c^2 - af)^2 - [c^2 - af]^2(c+d,)^2(c^2 + af)^2} ;$$

ma quindi, messo per compendio $A = r^2(p^2 + q^2) - p^2q^2$, risulta

$$c, = - \frac{[A^2 - 16r^2p^2q^2(r^2 - A)]^2}{16r^2p^2q^2A^2[A^2 + 2p^2q^2A - 4r^2p^2q^2]^2} ;$$

e la relazione per l'enneagono sarà in conseguenza

$$[A^2 - 16r^2p^2q^2(r^2 - A)]^2 - 16r^2p^2q^2A^2[A^2 + 2p^2q^2A - 4r^2p^2q^2]^2(p-r)(q-r) = 0 . (*)$$

Per le stesse ipotesi di $p=q=1$, la formola di Fuss, ordinata rispetto ad r , conduce all'equazione di 7° grado

$$128r^5 - 128r^4 - 128r^3 + 128r^2 + 32r^2 - 32r + 1 = 0 ;$$

e, se non è falsa, dovrà essere divisibile per la precedente di 3° grado; ma la divisione dà il quoziente esatto

$$16r^2 - 8r^2 - 12r^2 + 4r + 1 = 0 ;$$

duque la formola di Fuss, senza esser falsa, come afferma il Montuon, è però affetta da fattori estranei; il che è ben diverso; ed essi nel vedere nella nota, che segue, una singolare interpretazione di questi fattori.

Finalmente per ciò che riguarda la formola di Richelot, la quale parrebbe di 7° grado rispetto ad r , essa è senza dubbio inesatta; e per convincersene basta svilupparla e confrontarla con la nostra; ma sembra che il difetto provenga da qualche errore tipografico.

(*) Nella ipotesi de' cerchi concentrici, vale a dire di $p=q=1$, questa formola diviene

$$(8r^4 - 8r^2 + 1)^2 = 16r^2(2r^2 - 1)^2(r-1)^2 ;$$

ma estraendo la radice quadrata da' due membri, e tenendo conto del doppio segno, risultano le due formole distinte

$$(a) \quad 8r^2 - 4r^2 - 4r + 1 = 0 ,$$

$$(b) \quad 16r^4 - 8r^2 - 12r^2 + 4r + 1 = 0 .$$

Egli è chiaro che la formola (a) non è quella che risolve la questione, poichè riproduce la relazione per l'ettagono regolare, com'è data nella nota precedente; e dessa, invece, è già che diviene nel caso de' cerchi concentrici, quel fattore, che accompagna la relazione generale per l'enneagono. Laonde, se la nostra teoria è esatta, è la formola (b) quella che deve esprimere la relazione per l'enneagono

Rimarrrebbe tuttavia a sopprimere da questo risultamento il fattore da cui già lo sappiamo affetto, consistente nella formola che esprime la relazione per l'ettagono; ma tutto ciò non è che un soggetto di puro cal-

colare; ma a prima giunta ciò non sembra vero, e per due ragioni: l'una, perchè questa formola (b) trovasi coincidente con quel fattore estraneo, il quale, come si è visto nella nota precedente, accompagna la relazione per l'ettagono risultante dalla formola di Fuss; e l'altra perchè questo fattore è di 4° grado, mentre l'apotema del poligono regolare di nove lati dev' essere determinata da un'equazione di 2° grado, tre soli essendo gli enneagoni regolari iscrivibili. Ma, a dileguare ogni dubbio, noi cer-

cheremo questa equazione, che può facilmente ottenersi osservando che, siccome $\frac{2\pi}{9} = 40^\circ$, così il detto apotema è il coseno di 20° ; e perciò, essendo in generale

$$4 \cos^2 \frac{\alpha}{3} - 3 \cos \frac{\alpha}{3} = \cos \alpha,$$

se si ponga $\alpha = 60^\circ$, $\cos \frac{\alpha}{3} = \cos 20^\circ = r$, l'equazione che determina l'apotema r dell'enneagono regolare sarà

$$(c) \quad 8r^2 - 6r - 1 = 0.$$

Parrebbe adunque che le nostre deduzioni siano realmente in difetto; ma pure non è così; ed anzi esse ricevono ampia conferma dalla equazione (c), osservando che questa formola è un divisore esatto di (b), e si ha identicamente

$$16r^4 - 8r^2 - 12r^3 + 4r + 1 = (8r^2 - 6r - 1)(2r - 1).$$

Da ciò si vede che la formola (b) porge effettivamente la relazione per l'enneagono regolare, però accompagnata dal fattore attualmente estraneo, $2r - 1$, il quale darebbe la relazione pel triangolo equilatero; ma convien riflettere che questo fattore può soltanto esser determinato per lo passaggio al caso generale al caso particolare de' cerchi concentrici, punto non esistendo nella relazione generale per l'enneagono, perchè la medesima non è soddisfatta dalla relazione triangolare $r(p+q) - pq = 0$.

Intanto, poichè si tratta di un argomento così grave, qual'è quello de' fattori, che abbiamo l'abitudine di chiamare estranei, perchè non rispondono immediatamente alle questioni, che miriamo a risolvere: argomento che non potrebbe esser abbastanza studiato nell'interesse della perfezione dei metodi: noi faremo ancora osservare intorno a ciò che preceda, che l'equazione di 2° grado, da cui dipende l'apotema dell'enneagono regolare, ha potuto esser messa in veduta col soccorso di considerazioni particolari, le quali non si estendono ad ogni caso; ma se si impiegano allo stesso oggetto le formole più generali dalle sezioni angolari, l'equazione, a cui si perviene direttamente, non è già del 2° grado, ma è proprio l'equazione (b) di 4° grado. In fatti, disotolato con a un arco qualunque, se pongasi $\cos a = r$, si deduce da quelle formole

$$\cos 9a = 256r^9 - 576r^7 + 432r^5 - 120r^3 + 9r;$$

l'apote suppose $a = \frac{\pi}{9}$, l'equazione che determina l'apotema r dell'enneagono regolare sarà

$$256r^9 - 576r^7 + 432r^5 - 120r^3 + 9r + 1 = 0.$$

colo, il quale non offre difficoltà; e però sembrandoci sufficienti gli esempi recati, passeremo ad esaminare brevissimamente il caso de' poligoni parilateri.

Caso 2°; n pari.

42. In questo caso la coesistenza delle n equazioni, le quali definiscono la relazione, che si cerca, importa che l'eliminata corrispondente alla prima metà di quelle n equazioni sia un quadrato perfetto (n° 8). Ora supposto $n=2s$, l'eliminata corrispondente alle prime s equazioni sarà

$$ae_0^2 v_1^2 + c_1(v_0 + v_1)^2 + 2d_1 v_0 v_1 + f = 0;$$

ma perchè questa formola possa essere un quadrato perfetto è necessario e basta che sia soddisfatta la condizione $c_1=0$ (n° 43, I); dunque questa condizione esprime ad un tempo la relazione pel poligono di $2s$ lati iscritto nel cerchio V e circoscritto ad U . D'altronde essendo (n° 17)

$$c_s = \frac{(cc_{s-1} - af)^2}{c_{s-1}(c_{s-1} - c)^2},$$

risulta che la relazione, di cui trattasi si può esprimere con l'una o l'altra delle due formole

$$c_s = 0, \quad \text{e} \quad cc_{s-1} = af,$$

ciascuna delle quali darà in conseguenza la relazione pel quadrilatero, esagono, ottagono, ec. secondochè pongasi $s=2, 3, 4$, ec.; ed ecco, per esempio, i risultamenti per queste tre specie di poligoni.

Questa equazione dev'essere verificata da $r=-1$; e però, dividendola per $r+1$, si ha l'equazione di 8° grado

$$256r^8 - 256r^7 - 320r^6 + 320r^5 + 112r^4 - 112r^3 - 8r^2 + 8r + 1 = 0,$$

e siccome le sue radici sono uguali e due a due, ne segue che il primo membro è un quadrato perfetto, ed estruendone le radici, per la determinazione di r si ha infine l'equazione di 4° grado

$$16r^4 - 8r^3 - 12r^2 + 4r + 1 = 0;$$

ritornandosi così all'equazione (h), ottenuta per vie interamente diverse.

Quadrilatero.

$$c_1 = 0 ;$$

ma è $c_1 = \frac{(c^2 - af)}{4c(c+d)^2}$; dunque

$$c^2 = af ;$$

ed, esprimendo questa formola in p, q, r , risulta

$$r^2(p^2 + q^2) - p^2 q^2 = 0 .$$

Esagono.

$$c_2 = 0 ;$$

quindi pel valore di c_2 si ottiene

$$(c^2 - af)^2 = 4af(c+d)^2 ;$$

e, traducendo questa formola in p, q, r , verrà

$$[r^2(p^2 + q^2) - p^2 q^2]^2 = 4p^2 q^2 (p^2 - r^2)(q^2 - r^2) .$$

Ottagono.

$$c_3 = 0 ;$$

ed in conseguenza, tenendo presente il valore di c_3 (vedi il caso dell'enneagono) si avrà

$$(c^2 - af)^3 = 16afe^2(c+d)^2 .$$

Questa formola poi tradotta in p, q, r , si muta in

$$[r^2(p^2 + q^2) - p^2 q^2]^3 = 16r^4 p^2 q^2 (p^2 - r^2)(q^2 - r^2) .$$



